TEOREMA DE APROXIMAÇÃO

Joabe dos Santos Machado¹; Maurício de Araujo Ferreira²

1. Bolsista PIBIC/FAPESB, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: joabe_machado@hotmail.com

2. Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: maferreira@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: aproximação; valorização.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, buscando compreender seu funcionamento, o teorema de aproximação teve um papel central. De acordo com algumas fontes, esse teorema teve sua primeira aparição e demonstração no artigo de Artin-Whaples [1945]. E Hasse reproduziu a demonstração desse teorema na segunda edição de seu livro "Zahlentheorie". Na primeira edição, de 1938, Hasse prova o Teorema da Aproximação para o caso em que o corpo K é um corpo de números algébricos ou um corpo de funções algébricas sobre um corpo finito e para primos distintos $P_1, \dots, P_r$. Posteriormente, foi generalizado para corpos que são extensões algébricas finitas L de K , com relação a um número finito de primos de L , estendendo os primos P_i de K . Neste trabalho estudamos o Teorema de Aproximação para valorizações independentes em corpos arbitrários.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A pesquisa foi de natureza teórica. O ponto de partida foi o levantamento bibliográfico. Neste ponto, aprendemos os resultados que já eram conhecidos e as técnicas utilizadas para obtê-los. Foi estudado principalmente o Teoremas de Aproximação para valorizações em corpos.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Para que o Teorema da Aproximação seja compreendido, é necessário que alguns outros conceitos e proposições sejam estudados. Assim, buscou-se, neste trabalho, a realização mais minuciosa de tais proposições. O que poderá facilitar estudos posteriores sobre tal tema.

Definição 1.: Seja K um corpo e Γ um grupo abeliano ordenado. Uma valorização v de K é uma aplicação $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ uma valorização que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$;
2. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$;
3. $v(xy) = v(x) + v(y)$.

Teorema 1.: Seja $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ uma valorização de K . Para cada $\gamma \in K$ e cada $a \in \Gamma$ definimos o conjunto

$$U_\gamma(a) := \{x \in K : v(x - a) > \gamma\}.$$

Estes conjuntos formam uma base aberta de vizinhanças em torno do ponto a .

Demonstração: (i) $a \in U_\gamma(a)$, pois, $v(a - a) = v(0) = \infty > \gamma$

(ii) $U_\gamma(a) \cap U_\lambda(a) = U_\delta$, com $\delta = \max\{\gamma, \lambda\}$. De fato,

$$U_\gamma(a) \cap U_\lambda(a) = \{x \in v(x - a) > \gamma\} \cap \{x \in K : v(x - a) > \lambda\} = \{x \in K : v(x - a) > \max\{\gamma, \lambda\}\}$$

(iii) Se $b \in U_\gamma$ e $b \neq a$, temos que $v(b - a) = \gamma'$. Logo, $U_{\gamma'}(b) \subseteq U_\gamma(a)$.

Teorema 2.: Dois anéis de valorização de K não triviais O_1 e O_2 são dependentes se, e somente se, eles induzem a mesma topologia em K .

Demonstração: Uma vez que dois anéis de valorizações dependentes têm um engrossamento não trivial comum, para mostrar que eles induzem a mesma topologia, basta considerar o caso particular $O_1 \subseteq O_2$. De fato, por definição, duas valorizações são dependentes se $O_1 O_2 \subset K$ com $O_1 O_2 \neq K$. Como $O_1 \subset O_1 O_2$, temos que O_1 e $O_1 O_2$ induzem a mesma topologia. Analogamente, concluímos que $O_2 \subset O_1 O_2$. Desse modo, concluímos que O_1 e O_2 induzem a mesma topologia. Seja $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ uma valorização correspondente a O_1 . Pelo Lema 1 e suas consequências, existe um subgrupo convexo Δ de Γ associado a O_2 tal que $K^\times \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma/\Delta = \Gamma_2$ é uma valorização v_2 associada a O_2 , sendo $O_2 \neq K$ e $\Gamma \neq \{0\}$. Sendo

$$U_\gamma(0) = \{a \in K : v(a) > \gamma\}$$

$$U_{v+\Delta}(0) = \{a \in K : v_2(a) > v + \Delta\} = \{a \in K : v(a) > \lambda \ \forall \ \lambda \equiv \gamma \text{ mod } \Delta\}$$

Desse modo, concluímos que $U_{v+\Delta}(0) \subseteq U_\gamma(0)$

Por outro lado, se $v(a) > 2\gamma$, então $v_2(a) \geq 2\gamma + \Delta$. Assim, se $\gamma > 0$ e também $v(a) \leq \gamma + \Delta$, então $\gamma + \Delta \geq 2\gamma + \Delta$. Consequentemente, $\gamma \in \Delta$. Logo, para $0 < \gamma$ não pertencente a Δ , segue que $U_{2\gamma} \subseteq U_{v+\Delta}(0)$.

Logo as topologias induzidas por O_1 e O_2 são idênticas. Concluimos, desse modo, que as topologias induzidas de O_1 e O_2 são idênticas. Consideremos, agora, M_1 e M_2 ideais maximais de O_1 e O_2 , respectivamente. Se M_1 e M_2 induzem a mesma topologia em K , então M_2 é uma vizinhança aberta de 0 na topologia induzida por O_1 . Consequentemente, existe um $a \in K_x$ com $aM_1 \subseteq M_2$. Como M_2 é um ideal maximal do anel de valorização O_2 , o conjunto $K \setminus M_2$ é fechado para multiplicação. Assim podemos formar o anel

$$O_3 = \left\{ \frac{x}{y} : x \in O_1, y \in O_1 \setminus M_2 \right\}$$

Como O_3 contém O_1 , este também é um anel de valorização. O_3 também contém O_2 . De fato, se $x \in O_2 \setminus \{0\}$, então x^{-1} não pertence a M_2 . Consequentemente, $x = 1/x^{-1} \in O_3$ para $x^{-1} \in O_1$. Se, entretanto, x^{-1} não pertence a O_1 , temos que $x \in O_1$ e, consequentemente, $x \in O_3$. Finalmente $O_3 \neq K$. De fato, seja $z \in M_1 \setminus \{0\}$. Então, $\frac{1}{az}$ não pertence a O_3 . Podemos ver isto fazendo $\frac{1}{az} = \frac{x}{y}$, com $x \in O_1$ e $y \in O_1 \setminus M_2$. Então $y = a(zx) \in aM_1 \subseteq M_2$, uma contradição. Logo, provamos que O_1 e O_2 são dependentes.

Lema 1.: Seja O um anel de valorização de K não-trivial correspondente a valorização $v : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$. Então existe uma correspondência 1-1 de subgrupos convexos Δ de Γ com ideais primos $\mathfrak{p}$ de O , e consequentemente com os anéis que contém O . Essa correspondência é dada por

$$\begin{aligned} \Delta &\mapsto \mathfrak{p}_\Delta = \{x \in K : v(x) > \delta \ \forall \ \delta \in \Delta\} \\ \mathfrak{p} &\mapsto \Delta_{\mathfrak{p}} = \{\gamma \in \Gamma : \gamma, -\gamma < v(x) \ \forall \ x \in \mathfrak{p}\}. \end{aligned}$$

Em particular, se O tem classificação finita, essa classificação coincide com a dimensão de Krull de O .

Teorema 3 (Teorema da Aproximação): Suponha que $O_1, \dots, O_n$ sejam anéis de valorização independentes de K . Para cada i tal que $1 \leq i \leq n$, seja $v_i : K \rightarrow \Gamma_i \cup \{\infty\}$ uma valorização correspondente a O_i . Então, para cada $a_1, \dots, a_n \in K$ e $\gamma_1 \in \Gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma_n$, existe um $x \in K$ com $v_i(x - a_i) > \gamma_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

Demonstração: Para cada i tal que $1 \leq i \leq n$ escolhemos $\delta_i \in \Gamma_i$, satisfazendo $\delta_i \geq \gamma_i$ e $-\delta_i \leq v_i(a_1), \dots, v_i(a_n)$. Algumas novas restrições serão impostas para cada δ_i no decorrer desta demonstração.

Consideremos os conjuntos abertos $M_i = \{x \in K : 2\delta_i < v_i(x)\}$ e $A_i = \{x \in K : -2\delta_i \leq v_i(x)\}$.

(1) Podemos escolher o δ_i de tal forma que

$$M_1 \cap \bigcap_{j=2}^n (K \setminus A_j) \neq \emptyset$$

Para provar (1), vamos usar indução em n .

$n = 2$: se $M_1 \cap (K \setminus A_2) = \emptyset$, então $M_1 \subseteq A_2$. Escolhendo $c_i \in M_i (i = 1, 2)$, vemos que $c_i A_i \subset M_i$ e $c_i M_i \subset M_i$. Portanto, como $M_1 \subset A_2$, temos que

$$(c_2 c_1) M_1 = c_2 (c_1 M_1) \subseteq c_2 M_1 \subseteq c_2 A_2 \subseteq M_2$$

Fazendo $a = c_2 c_1$, vemos que $a M_1 \subseteq M_2$, e recaímos exatamente na demonstração do **Teorema 2**. Assim, concluímos que O_1 e O_2 são dependentes, o que é uma contradição. Pela hipótese de indução, existe $r \in M_1 \cap (K \setminus A_2)$. Escolhemos $\delta_3, \dots, \delta_n$ suficientemente grandes para que $e \in A_j$ para todo $j = 3, \dots, n$. Pela hipótese de indução, existe ainda um

$$s \in M_1 \cap \bigcap_{3 \leq j \leq n} (K \setminus A_j)$$

Se $s \notin A_2$, a prova está feita. No caso em que $s \in A_2$, como todo M_i e todo A_i é fechado na adição e na subtração,

$$s + r \in M_1 \cap \bigcap_{2 \leq j \leq n} (K \setminus A_j),$$

provamos (1).

analogamente, encontramos, por meio de δ_v que $M_1 \cap \bigcap_{j \neq i} (K \setminus A_j) \neq \emptyset$.

Um elemento desta interseção se aproxima do infinito com respeito a v_j para cada $j \neq i$, e ele se aproxima de 0 em relação a v_i .

(2) Segue-se agora que

$$(1 + M_i) \cap \bigcap_{j \neq i} M_j \neq \emptyset.$$

De fato,

$$x \in M_i \Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x} \in 1 + M_i,$$

e

$$x \in K \setminus A_j \Rightarrow v_j(1+x) = v_j(x), \text{ daí } \frac{1}{1+x} \in M_j.$$

(2) Então escolhemos $d_i \in (1 + M_i) \cap \bigcap_{j \neq i} M_j$ e, finalmente, definimos o conjunto

$$x := a_1 d_1 + \dots + a_n d_n.$$

Como $d_i - 1 \in M_i \ \forall \ j \neq i$, temos que $v_i(d_i - 1), v_i(d_j) > 2\delta_i$. Com isso, segue que $v_i(x - a_i) = v_i(a_1 d_1 + \dots + a_i(d_i - 1) + \dots + a_n d_n) > \min_{1 \leq j \leq n} \{v_i(a_j) + 2\delta\} \geq -\delta_i + 2\delta_i = \delta_i \geq \gamma_i$, como desejado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

Estudamos a topologia induzida por uma valorização em um corpo K . Além disso, descobrimos que a dependência dos anéis de valorização nada mais é do que induzir a mesma topologia em K .

REFERÊNCIAS

- [1] ENGLER, A. J.; PRESTEL, A. *Valued Field*. Springer-Verlag, 2006.