UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA - 2019

Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$

1. Gabriella Conceição e Silva-PROBIC/UEFS, Graduanda em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: gabiicssilva@gmail.com
2. Claudiano Goulart, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: cgoulart@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Superfícies Regulares, Superfícies Mínimas, Representação de Weierstrass.

INTRODUÇÃO

Este trabalho teve como objetivo estudar de forma detalhada os resultados e conceitos associados à teoria das chamadas Superfícies Mínimas. Tais superfícies são de grande importância na área de Geometria Diferencial, tendo em vista ao grande número de aplicações dispostas em diversos campos, como por exemplo na área de mecânica bem como na confecção de latas de produtos alimentícios.

Uma superfície parametrizada regular $X:U\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$ é denominada mínima se ela possui curvatura média H identicamente nula. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita mínima se cada uma de suas parametrizações forem mínima.

O estudo destas superfícies foi inicialmente proposto por Lagrange, em 1760, que apresentou o seguinte problema: *Dada uma curva fechada* C $\subset$ $\mathbb{R}^3$ *(sem auto interseções), encontrar uma superfície de área mínima tendo* C *como fronteira",* Com o avanço dos estudos nesta área foi possível perceber que: se a superfície possui área mínima então H=0. No entanto, a recíproca não é verdadeira ou seja, H=0 não garante superfície de área mínima. Mais precisamente, temos que a superfície é ponto crítico de uma determinada função área. Mesmo assim, o nome Superfícies Mínimas como definido, foi mantido por tradição.

As superfícies mínimas são muitas vezes associadas as películas de sabão, que podem ser obtidas ao mergulhar uma moldura de arame, em água com sabão, e retirando-a com cuidado obtemos uma superfície, que em seus pontos regulares possuem curvatura média igual a zero. A relação entre as superfícies mínimas e as películas de sabão serviu como motivação para o problema de Lagrange, que é também conhecido como problema de Plateau, por ter sido ele o responsável por desenvolver o método de estudo das superfícies mínimas através das películas de sabão.

A busca de exemplos de tais superfícies não é uma tarefa nada fácil, o próprio Lagrange não deu nenhum outro exemplo além do plano. Anos mais tarde Meusnier cita o helicóide e o catenóide e por quase cem anos esses são os únicos exemplos conhecidos. Um resultado satisfatório na busca de exemplos dessas superfícies e que foi ferramenta de estudo para este trabalho, é a Representação de Weierstrass, apresentada em 1866 por Weierstrass.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

Por ter um caráter teórico e ter sido desenvolvida na área da matemática pura, o trabalho se deu por meio de estudos baseados em livros e artigos disponíveis na Biblioteca Central da UEFS ou no acervo do orientador. Iniciamos com os pré-requisitos básicos que eram necessários para entendimento do tema proposto, e em seguida o estudo das Superfícies Mínimas e da Representação de Weierstrass.

O professor orientador sugeria livros e temas específicos e solicitava seminários semanalmente onde discutíamos a respeito dos conteúdos estudados e sobre as dúvidas que surgiam durante o desenvolvimento do estudo. Utilizamos inicialmente livro de Keti Tenenblat [3] e Manfredo P do Carmo [5], que foi nossa principal ferramenta para o estudo inicial dos pré-requisitos básicos da Geometria Diferencial, depois fizemos uso dos livros de Alcides Lins Neto [1] e Geraldo Ávila [2], para estudo de variáveis complexas, alguns artigos de internet onde realizamos uma pesquisa em busca de dados históricos e por fim o livro do Lucas M. Barbosa e Gervasio Colares [4], que foi de fundamental importância para o estudo dos resultados acerca das superfícies mínimas e a compreensão da Representação de Weierstrass,

Fizemos uso também, do Winplot, software matemático com finalidade de gerar gráficos em 2D e 3D a partir de funções ou equações matemáticas, com o qual foi possível construir algumas das superfícies mínimas estudadas.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

As superfícies mínimas são então consideradas como superfícies que são pontos críticos de determinadas funções áreas. Por mais, que a princípio acreditava-se que essas superfícies possuíam área mínima, atualmente já sabemos que isso nem sempre é verdade.

Com respeito as películas de sabão e o experimento realizado por Plateau, é possível obter superfícies mínimas mergulhando uma moldura de arame em solução de água e sabão, pudemos perceber que para obtermos o catenóide e o helicóide por exemplo, que foram os primeiros exemplos superfícies mínimas além do plano, bastava mergulhar na água com sabão dois arcos e separá-los com cuidados para obtenção da catenóide e um arame em formato de hélice para obtenção do helicoide, como se segue nas imagens abaixo:

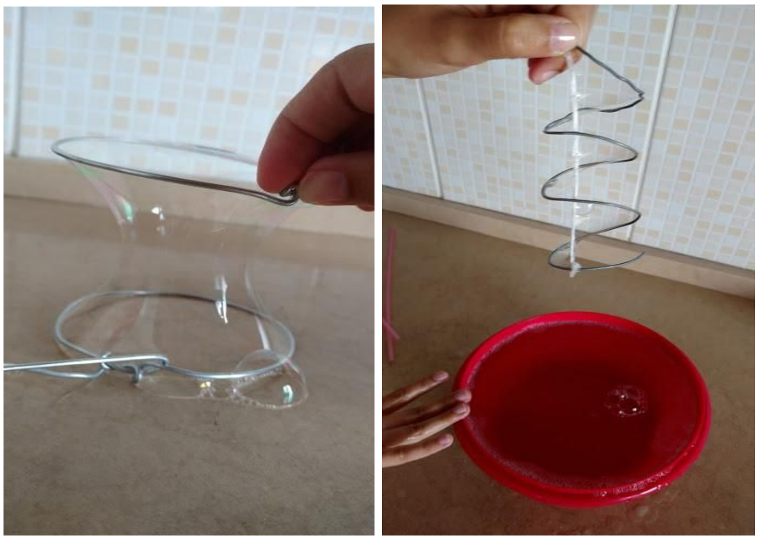

Figura 1: Catenóide e Helicoide formados películas de sabão. (Fonte: Autores)

A pesquisa ainda possibilitou realizar uma análise tanto algébrica dos conceitos envolvidos com o tema, assim como analisar, através da construção em software matemático, a construção de algumas das superfícies mínimas em estudo. Para ilustrar, apresentamos, abaixo, a representação gráfica do catenóide (Figura 2), do helicoide (Figura 3) e da superfície de Enneper (Figura 4)

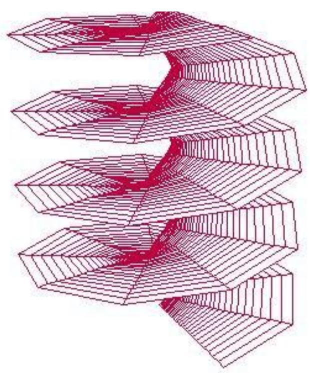

Figura 2: Helicoide. (Fonte: Autores)

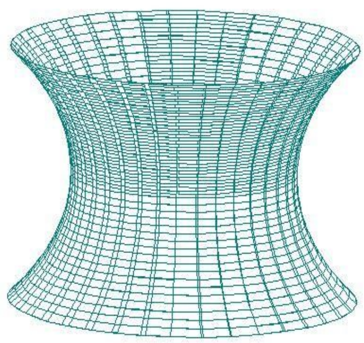

Figura 3: Catenóide. (Fonte: Autores)

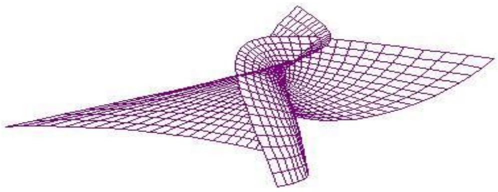

Figura 4: Superfície de Enneper. (Fonte: Autores)

Durante a pesquisa foi possível debruçar sobre diversos conceitos que não são apresentados nas disciplinas regulares da graduação, contribuindo assim para obtenção de novos conhecimentos, como também incentivando para um futuro ingresso em mestrado na área de matemática pura.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

A pesquisa contribuiu de forma satisfatória no que se diz respeito a compreensão de tais conteúdos matemáticos, uma vez que os mesmos não são tratados de forma aprofundada em disciplinas da graduação, foi uma oportunidade de grande valia, contribuindo na formação profissional e incentivando a orientanda inclusive para um futuro ingresso no mestrado.

REFERÊNCIAS

1. NETO, Alcides Lins,1947. Funções de uma Variável Complexa- Rio de Janeiro, Instituto Matemática Pura e Aplicada, CNPq,1993.
2. ÁVILA, Geraldo. Variáveis Complexas e Aplicações-Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos.Ed.1990
3. TENEMBLAT, Keti. Introdução a Geometria Diferencial- Brasília. Editora Universidade de Brasília,1990. 1° reimpressão.
4. J.Lucas M. Barbosa; A.Gervasio Colares. **Minimal Surfaces in R^3.** V Escola de Geometria Diferencial;Universidade de São Paulo,1984.
5. CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
6. ARRUDA, Janaina da Silva; DIÓGINES , Rafael Jorge Pontes. Semana Universitária-Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira. Disponível em: http://semanauniversitaria.unilab.edu.br. Acesso: 11 de novembro 2018.