UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA - 2019

AÇÕES DE GRUPOS

Gabriele de Jesus Silva[1] e Kisnney Emiliano de Almeida[2]
1. Bolsista PIBIC/CNPq, Graduanda em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: gabi_fsa_@hotmail.com
2. Orientador, DEXA, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: kisnney@gmail.com

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de grupos, Ações de grupos, órbita, estabilizador.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo expor os conceitos, definições e teoremas estudados durante meu período de participação do programa de Iniciação Científica da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Todos esses itens foram adquiridos a partir do tema sugerido pelo projeto: Ações de Grupos, uma importante ferramenta utilizada tanto na teoria de grupos quanto em outras áreas da matemática como por exemplo, na topologia algébrica. Uma ação de um grupo G em um conjunto X (qualquer) pode ser definida como um homomorfismo de G para $Sym(X)$, onde $Sym(X)$ é definido como o grupo de simetrias de X. Alguns grupos já são definidos inclusive a partir desse conceito, um exemplo clássico disso é o grupo de permutações S_n de um conjunto que possui n elementos. Além disso, muitos teoremas podem ser demonstrados e estruturados partindo das ações de grupos, por isso tal assunto possui tamanha importância na matemática. No curso de Licenciatura em Matemática da UEFS, muito pouco é estudado acerca de teoria de grupos e em geral nada é visto sobre ações de grupos. O programa proporcionou um maior conhecimento sobre a área, em especial sobre as ações de grupos, além de incentivar a pesquisa e o relacionamento com pesquisadores desta e de outras áreas em eventos e na própria universidade.

METODOLOGIA

A pesquisa foi de natureza teórica. Inicialmente, foi feito um levantamento bibliográfico, selecionando-se livros e artigos essenciais para o entendimento dos conceitos básicos da área. Como ponto de partida, foi sugerido pelo orientador os livros Algebra (HUNGERFORD, 1974) e Group Theory (MILNE, 1996), além de alguns trabalhos e notas de aula sobre o tema. Após o levantamento da bibliografia, foi feito o estudo de conceitos, definições e propriedades básicas de ações de grupo como: órbita, estabilizador, centralizador e outros.

Então demos início ao estudo de algumas ações de grupos específicas, com foco especial em ações de conjugação. Logo após estudamos demonstrações de alguns teoremas baseadas nos conceitos de ações de grupos, como por exemplo do Teorema de Cayley.

Durante a iniciação a bolsista apresentou vários seminários ao orientador a respeito de seus estudos e ao final do programa a bolsista preparou um seminário com o intuito de apresentar para os outros colegas de orientação os resultados obtidos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O conceito mais importante a ser entendido para compreender os resultados obtidos é o de ação de grupo.

Uma **ação** de um grupo G em um conjunto X é um homomorfismo de G no grupo de simetrias de X, ou seja:

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to Sym(X) \\ g &\mapsto \quad \varphi_g : X \to X \end{aligned}$$

onde $\varphi_g(x) = gx$, para cada $x \in X$.

Por exemplo, podemos considerar a ação do grupo $\mathbb{Z}$ no conjunto $\mathbb{R}$ dada por $n \mapsto \varphi_n$, onde $\varphi_n(x) = n + x$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.

O exemplo acima é um caso particular da ação mais geral descrita abaixo. Seja H um subgrupo de G. A ação de **translação** de H em G é dada por $h \mapsto \varphi_h$, onde $\varphi_h(g) = hg$, para cada $h \in H$ e $g \in G$.

Alguns conceitos que estão ligados às ações de grupos são os de órbita e estabilizadores. Dada uma ação de G em X, a **órbita** de x é o subconjunto

$$O_x = \{\varphi_g(x) \,|\, g \in G\} \subset X.$$

As órbitas podem ser definidas também como classes de equivalência com respeito a uma certa relação de equivalência, o que resulta na proposição abaixo.

Proposição 1. *Seja G um grupo agindo em X. Então X é igual à união disjunta das órbitas da ação.*

Considere uma ação do grupo G no conjunto X. Para cada $x \in X$, seja

$$G_x = \{g \in G \mid \varphi_g(x) = x\}$$

o conjunto de todos os elementos de G que fixam x. Então o subgrupo G_x é chamado **estabilizador** de x.

Uma relação entre os conceitos acima é obtida através do próximo teorema.

Teorema 2. *Seja G um grupo agindo em X. Então*

$$|O_x| = |G : G_x|.$$

A ação por **conjugação** é dada pela função

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to \mathrm{Sym}(G) \\ g &\mapsto \quad \varphi_g : G \to G \end{aligned}$$

onde $\varphi_g(h) := ghg^{-1}$ para cada $g, h \in G$.

Note que ao identificarmos o estabilizador de uma ação por conjugação encontraremos

$$G_x = \{g \in G \,|\, gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \,|\, gx = xg\},$$

que é o subgrupo de G chamado **centralizador** de x em G.

Combinando a Proposição 1 e o Teorema 2, obtemos a **Equação das Classes**:

$$|G| = \sum_{i=1}^{n} |G : C_G(x_i)|.$$

Estudamos também outros teoremas relacionados a ações de grupos, dentre eles o Teorema de Cayley.

Teorema 3 (Cayley)**.** *Se G é um grupo, então $G \to Sym(G)$ é um monomorfismo. Consequentemente todo grupo é isomorfo a um grupo de permutação. Em particular, todo grupo finito é isomorfo a um subgrupo de S_n, com $n = |G|$.*

Pretendemos agora nos aprofundar em resultados mais específicos relacionados a ações transitivas, mas esse estudo ainda está no estágio inicial.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A participação no programa motivou a busca da compreensão do tema proposto, uma vez que o mesmo não é tratado em nenhuma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS. Foi uma experiência incrivel e enrriquecedora no que diz respeito ao crescimento acadêmico e pessoal.

REFERÊNCIAS

1 ANDRETTI, C. M. Ações de Grupos e Contagem: Teorema de Burnside. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

2 ANJOS, K. Ações Parciais de Grupos. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2017.

3 GARCIA, A.; LEQUAIN, Y.Elementos de algebra. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA,2005.

4 GARONZI, M. Notas de Aula Algebra 3. UnB, 2018. 93 p. Notas de Aula.

5 HUNGERFORD, T. W. Algebra. Holt, Rinehart and Winston. Inc. New York, 1974.

6 MILNE, James S. Group theory. Version, 1996.