UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA - 2019

ANÉIS DE VALORIZAÇÃO EM ÁLGEBRAS DE QUATÉRNIOS

Henrique Santos Neves[1]; Maurício de Araújo Ferreira[2]
1. Bolsista PROBIC/UEFS, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: amazingwizard06@gmail.com
2. Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, E-mail: maferreira@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Valorizações; Anéis de Valorização; Álgebras de Quatérnios.

INTRODUÇÃO

A Teoria de Valorização teve início em 1912, quando o matemático húngaro Josef Kurschák formulou os axiomas de *valorização em corpos*. A principal motivação foi a tentativa de melhorar a fundamentação da teoria de corpos *p-ádicos* definidos por Kurt Hensel. Nas décadas seguintes houve um rápido desenvolvimento da *Teoria de Valorização*, após a descoberta de que muitos problemas da *Teoria de Números Algébricos* poderiam ser melhores entendidos com o uso de métodos da Teoria de Valorização. A eficiência da Teoria de Valorizações no estudo de corpos levou a tentativa natural de tentar generalizar este conceito para estruturas mais gerais, como por exemplo, em álgebra de *Quatérnios*, tais extensões poderiam ser chamadas de *valorizações não-comutativas.* Antes do desenvolvimento da pesquisa sobre os Quatérnios estudaremos neste trabalho extensões de corpos e mais particularmente extensões quadráticas dos racionais, além disso estudaremos o comportamento da valorização sobre essas extensões, com a intenção de reunir informações importantes que nos auxiliarão nos resultados sobre o conjunto dos Quatérnios.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A pesquisa é de natureza teórica. O ponto de partida foi o levantamento bibliográfico. Neste ponto, buscamos os resultados que já são conhecidos e as técnicas utilizadas para obtê-los. Foram estudados a estrutura de anéis de valorizações em corpos, principalmente no caso das valorizações p-ádicas no corpo dos racionais. A partir daí partimos para investigar extensões de corpos, conjuntamente com isso, o comportamento de uma valorização sobre essa extensão, estudando o seu grau residual, seu índice de ramificação e a equivalência entre duas valorizações.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

A revisão bibliográfica foi importante para a reunião de resultados e técnicas já obtidas ao longo dos estudos da Teoria de Valorização, o qual possibilitou um melhor tratamento de nosso problema, ou seja, resultados e discussão deste trabalho surgem de definições e lemas anteriores que são de suma importância. Detalharemos a seguir as informações principais dos objetos matemáticos e além disso as proposições mais importantes para este trabalho.

Def.1.1: Seja $(K,+,\cdot)$ um corpo e $(\Gamma,+)$ um grupo abeliano totalmente ordenado, chamaremos de *valorização* a função v sobrejetiva

$$v: K \to \Gamma \cup \{\infty\}$$
$$x \mapsto v(x)$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

i) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$
ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$
iii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

Obs.: Chamaremos o grupo Γ de *grupo de valores.*

Exemplo 1.2: Seja $\mathbb{Q}$ o conjuntos números racionais, podemos definir a seguinte valorização:

Seja $p \in \mathbb{Q}$, um primo qualquer, temos que $\forall\, x \in \mathbb{Q}$, existe único $\alpha \in \mathbb{Z}$, tal que:
$x = p^{\alpha} \cdot \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $p \nmid ab$

$$v_p: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

$$v_p(x) = \begin{cases} \alpha, se\ x \neq 0 \\ \infty, se\ x = 0 \end{cases}$$

Esta valorização recebe um nome especial de *valorização p-ádica* e será parte importante em nosso trabalho. Note que o grupo de valores de v_p é $\mathbb{Z} = v_p(\mathbb{Q}^{\times})$. Além disso, toda valorização no corpo dos racionais será uma *valorização p-ádica.*
Da definição de valorização podemos definir um conjunto $O_v := \{x \in K\ | v(x) \geq 0\}$ que um será um subanel de K que é chamado de *anel de valorização* e juntamente com ele podemos definir também um conjunto $M_v := \{x \in K | v(x) > 0\}$, que será *ideal maximal* deste anel O_v. Como O_v é um anel e M_v seu ideal maximal, definimos o corpo quociente $\overline{K_v} := \frac{O_v}{M_v}$ chamado de *Corpo de Classe de Resíduo de* v.
Com essa definição podemos pensar quando existe uma espécie de extensão da valorização v, onde tudo acontece em uma estrutura que não é mais um corpo, o qual é um tema presente em várias pesquisas. Se (K,v) é um corpo valorizado e D é um anel de divisão de dimensão finita sobre seu centro K então existe uma valorização w em D que estende v? Estamos particularmente interessados quando o corpo K é o conjunto dos números racionais e o anel de divisão é os *quatérnios.* Antes de tudo devemos definir quem são os quatérnios de Hamilton.

Def.1.3: Os *Quatérnios de Hamilton* é definido por:

$\mathbb{H}:=\{a+bi+cj+dk|a,b,c,d\in\mathbb{Q}\ e\ i^2=j^2=k^2=ijk=-1\}$, temos que tal conjunto é um anel de divisão não-comutativo.

Neste caso, não podemos esperar que toda valorização p-ádica de $\mathbb{Q}$ se estenda em $\mathbb{H}$. Contudo, podemos esperar uma condição que haja tal extensão, ou seja, para quais primos p, a valorização p-ádica de $\mathbb{Q}$ se estende para $\mathbb{H}$? Conforme Wadsworth (1986), quando a valorização se estende para uma anel de divisão D, em nosso caso para $\mathbb{H}$, esta é única. Desta forma, a valorização v deve ter extensão única para cada corpo entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{H}$, que são extensões quadráticas de $\mathbb{Q}$. Nestes casos, pretendemos investigar para quais subcorpos quadráticos de $\mathbb{Q}$ a valorização p-ádica tem extensão única.

Teorema 1.4: (Chevalley) Para um corpo K, seja $R\subseteq K$ subanel de K e $\rho\subseteq R$ um ideal primo de R. Então existe uma anel de valorização O de K, tal que:
$R\subseteq O\ e\ M\cap R=\rho$
Onde M é o ideal maximal do anel de valorização O.

Teorema 1.5: Seja K_2/K_1uma extensão de corpos, e seja $O_1\subseteq K_1$ um anel de valorização, então existe O_2 uma *extensão* de O_1em K_2.

Dada uma extensão $(K_1,O_1)\subseteq(K_2,O_2)$, correspondendo a valorização $v_i:K_i\rightarrow\Gamma_i\cup\{\infty\}, para\ \ i=1,2$. Temos que $\Gamma_1\leq\Gamma_2$ (subgrupo) e $\overline{K_1}\leq\overline{K_2}$ (subcorpo). Se temos essas relações entre estes conjuntos podemos pensar no $[\Gamma_1:\Gamma_2]$(índice de Γ_1 em Γ_2) e no grau de extensão $[\overline{K_2}:\overline{K_1}]$. O número $f=f(O_2,O_1)=[\overline{K_2}:\overline{K_1}]$ será chamado *grau residual* e o número $e=e(O_2,O_1)=[\Gamma_1:\Gamma_2]$ será chamado *índice de ramificação*. Vale que se a extensão é finita, então $e,f<\infty$ e $ef\leq n=[K_2:K_1]$.

Teorema 1.6: Seja O um anel de valorização de um corpo K, com grupo de valores $\mathbb{Z}$, e sejam $O_1,\dots,O_m$ extensões de O em uma extensão finita e separável L de K. Então:

$$[L:K]=\sum_{i=1}^{m}e(O_i,O)f(O_i,O)$$

Como já discutido anteriormente desejamos estudar os corpos entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{H}$ (corpos intermediários), sabemos que são tais corpos são extensões quadráticas de $\mathbb{Q}$, ou seja, são corpos da forma $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, com d livre de quadrados. Sabemos que toda valorização em $\mathbb{Q}$ é uma valorização p-ádica, pelo *Teorema 1.5* concluímos que existirá uma valorização em $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, mas quantas existirão? Podemos limitar tal quantidade de extensões pelo *Teorema 1.6*, pois o grupo de valores de uma valorização p-ádica é $\mathbb{Z}$. Portanto o número de extensões está limitado pelo grau da extensão que é dois, podendo dividir em três casos:

i) Existir uma única valorização, onde o grau de resíduo é dois, ou seja, tem um aumento no corpo de resíduo.
ii) Existir uma única extensão desta valorização, onde o índice de ramificação é dois, ou seja, há um aumento no grupo de valores.
iii) Existirão duas extensões para tal valorização, mas o grupo de valores e o grau de resíduo se mantem intactos.

Veja que tais casos dependerão exclusivamente da relação entre p e d. Conseguimos retirar informações preciosas do comportamento dessas extensões e por meio delas nosso objetivo é continuar estudando a álgebra de Quarténios e tentar generalizar tais valorização para essa álgebra não-comutativa, além de tentar compreender o processo e aplicá-lo em casos mais generalizados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

Concluímos que este trabalho contribuiu muito para a formação acadêmica do bolsista, além de auxilia-lo no seu pensamento científico e matemático, sendo muito importante para sua carreira profissional.

Através desta pesquisa obtivemos informações importantes e conclusivas sobre os anéis de valorização, sobre extensões de corpos e prolongamento de valorizações, o que nos auxiliará na pesquisa de anéis de valorização em álgebras de Quatérnios. Através de corpos intermediário entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{H}$ buscamos informações que contribuirão de forma significativa para se entender o que acontece no caso geral e mais abstrato, mas não sendo possível o estudo completo de tais objetos. Assim, motivando a continuação dos estudos e trabalhos desenvolvidos neste projeto, tendo a continuidade financiada pela PROBIC/UEFS segundo edital PPPG-IC/UEFS N° 01/2019, com seguinte título de plano de trabalho: Valorizações em subcorpos quadráticos em álgebras de Quatérnios sobre os racionais.

REFERÊNCIAS

ENGLER, A. J.; PRESTEL, A. Valued Field. Springer-Verlag, 2006.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. Elementos de Álgebra. 6ª ed. Rio de Janeiro: Editora IMPA (Projeto Euclides), 2018.

BORGES, H.; TENGAN, E. Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

LANG, S. Algebra. Menlo Park, Califórnia: Editora Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.

WADSWORTH, A. R.: Extending valuations to finite-dimensional division algebras. Proc. Amer. Math. Soc. v. 98 (1986), no. 1, 20—22.