UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA - 2019

PRODUTO SEMIDIRETO DE GRUPOS.

Marcos Weslley Vitória Brandão[1]
Kisnney Emiliano de Almeida [2]
1. Estagiário PEVIC, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: weslleymarcos10@gmail.com
2. Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: kisnney@gmail.com

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de Grupos; Produto semidireto de Grupos; Produto Direto de Grupos

INTRODUÇÃO

O Produto Semidireto de Grupos é uma construção extremamente relevante para a teoria de grupos. Essa construção é utilizada há décadas tanto como ferramenta quanto como objeto de pesquisa das investigações em matemática e outras áreas de conhecimento, incluindo teoria de grupos, outras áreas da matemática, física, física matemática e criptografia.

As propriedades de um grupo ficam mais claras quando é conhecido o processo de construção dele. Nesse sentido, o estudo do produto semidireto de grupos permite um aprofundamento no entendimento das características dos grupos gerados a partir dessa construção. Além disso, existem grupos específicos cujas descrições mais simples são obtidas a partir do produto semidireto. A importância do produto semidireto nesse estudo é tanto para a construção de grupos, quanto para elucidar as características dos mesmos.

Tendo em vista a importância do produto semidireto dentro da teoria de grupos, foram estudadas sua definição, propriedades e exemplos, a fim de que posteriormente pudessem ser feitas construções de grupos importantes.

METODOLOGIA

O estudo foi desenvolvido de acordo com os seguintes aspectos:

1. 1. Indicações do orientador de situações relacionadas ao tema de estudo para posterior apresentação e/ou busca de situações pertinentes ao estudo, por parte do aluno, para posterior apresentação.

2. Apresentação em um quadro branco de situações indicadas pelo orientador e/ou de situações encontradas pelo aluno.

3. Discussão a respeito dos conteúdos apresentados, comentários importantes do orientador e levantamento de questões relacionadas ao que foi apresentado.

4. Correção das informações equivocadas levadas para a apresentação, e por fim, desenvolvimento da escrita de todas as informações relacionadas ao estudo e tratadas naquele momento.

Os encontros ocorreram em salas com quadro branco.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

PRODUTO DIRETO DE GRUPOS

O produto direto de dois grupos é um grupo formado a partir de outros dois, onde se considera o produto cartesiano e se define uma nova operação. Vejamos de modo mais preciso no teorema 1 e na definição 2.

Teorema 1. *Sejam $(H, \otimes)$ e $(K, \oplus)$ grupos. Se considerarmos o conjunto $H \times K$ e definirmos a operação $(h, k) \odot (h', k') := (h \otimes h', k \oplus k')$, obtemos o grupo $(H \times K, \odot)$.*

De fato, A operação $\odot$ é associativa e temos que $(1_H, 1_K)$ é a identidade do grupo, onde 1_H e 1_K, são as respectivas identidades de H e K. Além disso cada elemento (h, k) de $H \times K$ possui um inverso dado por $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$.

Definição 2. O grupo $(H \times K, \odot)$ é chamado de *produto direto* de $(H, \otimes)$ por $(K, \oplus)$ e pode ser denotado simplesmente por $H \times K$.

Proposição 3. *O grupo $(H \times K, \odot)$ é abeliano se, e somente se, os grupos $(H, \otimes)$ e $(K, \oplus)$ são abelianos.*

É possivel fazer o produto direto de uma quantidade finita de grupos maior do que dois. O teorema 4 e a definição 5 nos esclarecem isso de forma mais precisa.

Teorema 4. *Sejam* $(G_1, \bigotimes^1), (G_2, \bigotimes^2), \ldots, (G_n, \bigotimes^n)$ *grupos. Considerando o conjunto* $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ *e definindo a operação* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \odot (y_1, y_2, \ldots, y_n) \coloneqq (x_1 \bigotimes^1 y_1, x_2 \bigotimes^2 y_2, \ldots, x_n \bigotimes^n y_n)$*, Obtem-se o grupo* $(G, \odot)$.

De fato, a operação $\odot$ é associativa e temos que $(1_{G_1}, 1_{G_2}, \ldots, 1_{G_n})$ é a identidade do grupo, onde 1_{G_i} é o neutro do grupo G_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Além disso, todo elemento $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de G possui inverso $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$. Onde x_i^{-1} é o inverso de x_i em G_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 5. O grupo $(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n, \odot)$ é chamado produto direto dos grupos $(G_1, \bigotimes^1), (G_2, \bigotimes^2), \ldots, (G_n, \bigotimes^n)$. Ele pode também ser denotado por $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ e ser dito produto direto dos grupos $G_1, G_2, \ldots, G_n$

PRODUTO SEMIDIRETO DE GRUPOS.

O produto semidireto de grupos é um grupo formado a partir de dois outros grupos, onde se considera o produto cartesiano e se define uma nova operação, considerando um homomorfismo (que é uma ação de grupos). Isso pode ser visto com maior precisão, no teorema 6 e na definição 7.

Teorema 6. *Sejam* N, K *grupos e* $\sigma : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ *um homomorfismo, onde* $\mathrm{Aut}(N)$ *é o grupo de automorfismos de* N*. Considere o conjunto* $N \times K$ *e defina a operação*

$$(n, k) \cdot (n', k') \coloneqq (n\sigma(k)(n'), kk').$$

Temos que o par $(N \times K, \cdot)$ *é um grupo.*

De fato, a operação é associativa e a identidade é dada por $(1_N, 1_K)$. Além disso $(n, k)^{-1} = (\sigma(k^{-1})(n^{-1}), k^{-1})$ é o inverso de $(n, k) \in N \times K$.

Definição 7. O grupo $(N \times K, \cdot)$ é chamado de produto semidireto de N por K com homomorfismo σ. Ele é também denotado por $N \rtimes_\sigma K$.

Proposição 8. *Sejam* N *e* K *dois grupos e* $\sigma : K \longrightarrow AUT(N)$ *um homomorfismo. Então valem:*

1. *O produto semidireto* $N \rtimes_\sigma K$ *é igual ao produto direto* $N \times K$ *se e somente se* σ *é tal que* $\sigma(k) = \mathrm{Id}_N$ *para todo* $k \in K$ *(*σ *é o homomorfismo trivial).*

2. *Cada potência do elemento* $(n, k) \in N \rtimes_\sigma K$ *é dada por*
$$(n,k)^m = \left(\prod_{i=0}^{m-1} \sigma(k^i)(n), k^m \right).$$

3. *Quaisquer que sejam* $n \in N$ *e* $k \in K$*, tem-se que* $(n, 1_K) \cdot (1_N, k) = (n, k)$*, e que* $(1_N, k) \cdot (n, 1_K) = (\sigma(k)(n), k)$*. Se* σ *não é trivial, então vão existir* $n \in N$ *e* $k \in K$*, tais que* $(n, k) \neq (\sigma(k)(n), k)$*. Ou seja, se* σ *é não-trivial então* $N \rtimes_\sigma K$ *é não-abeliano.*

4. *O conjunto*
$$\{(n, 1_K) \in N \rtimes_\sigma K : n \in N\}$$
é um subgrupo normal de $N \rtimes_\sigma K$ *isomorfo a* N*.*

5. *O conjunto*
$$\{(1_N, k) \in N \rtimes_\sigma K : k \in K\}$$
é um subgrupo de $N \rtimes_\sigma K$ *isomorfo a* K*. Esse subgrupo é normal se e somente se* σ *é o homomorfismo trivial.*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todo o processo de desenvolvimento do estudo foi de extrema importância para a construção dos conceitos, definições e propriedades estudados. O referencial teórico foi bastante explorado, e a metodologia utilizada permitiu que as informações obtidas fossem bem assimiladas e relacionadas umas com as outras. As construções que foram feitas, consolidaram os conhecimentos sobre os grupos no geral, e permitiram o conhecimento de novas caracterizações para grupos já conhecidos.

Referências

[1] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. *Elementos de álgebra.* Rio de Janeiro: Impa, 2001.

[2] ROTMAN, Joseph J. *An Introduction to the Theory of Groups.* Springer Science Business Media, 2012.

[3] MILNE, J. S. *Group Theory.* Version, 1996.