UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA - 2019

Grupos de Tranças

Mirele Pereira da Silva[1]; Kisnney Emiliano de Almeida[2]
1. Bolsista PROBIC/UEFS, Graduanda em licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: mirele.fmfm@gmail.com
2. Orientador, DEXA , Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: kisnney@gmail.com

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de Grupos; Grupos de tranças; Apresentações de Grupos.

INTRODUÇÃO

Grupos de tranças ou “Braid groups” são estudados desde 1925, primeiramente com uma visão intuitiva puramente geométrica e posteriormente com uma visão mais algébrica. Além de serem alvo de interesse por si só até hoje, o estudo de grupos de tranças também tem aplicações em diferentes áreas da matemática e outras ciências. As ideias utilizadas para a construção dos grupos de tranças também têm sido amplamente generalizadas para outras classes de grupos, porém esse trabalho manteve o foco nos grupos de tranças clássicos de Artin.
Os grupos de tranças podem ser vistos modernamente pelo ponto de vista topológico e algébrico. Do ponto de vista topológico, os elementos de um grupo de tranças são classes de equivalência de trançados de cordas conectando dois planos paralelos. Do ponto de vista algébrico, os grupos de tranças formam grupos de Artin infinitos dados por uma certa apresentação finita, com uma construção simples e muitas propriedades interessantes.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A pesquisa foi de natureza teórica. Inicialmente foi feito um levantamento bibliográfico, selecionando-se livros e artigos essenciais para o entendimento dos conceitos básicos da área. Foi feito o estudo das definições e propriedades básicas dos grupos de tranças B_n, tanto pelo ponto de vista geométrico quanto algébrico. Posteriormente estudamos a apresentação usual de B_n, bem como algumas de suas propriedades, com foco especial no centro dos grupos.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Sejam E e E' planos paralelos com n segmentos $(d_1, ..., d_n)$ que ligam pontos iniciais $A_1, .., A_n$ de E aos pontos finais $(B_1, .., B_n)$ de E', tais que:

1. Os segmentos $(d_1, ..., d_n)$ são distintos dois a dois;
2. Cada segmento liga o ponto inicial correspondente ao ponto final correspondente;
3. Nenhum plano paralelo a E e E' intersecta os segmentos em mais de um ponto; ou seja, os segmentos estão continuamente descendo.

Chamamos essa configuração de ***n*-trança** ou **trança de *n* cordas**. Cada segmento d_k, k=1,..., n, é chamado ***i*-ésima corda** da trança, conforme a figura 1.

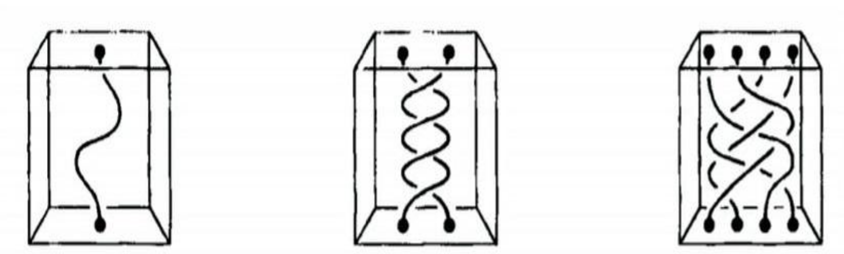
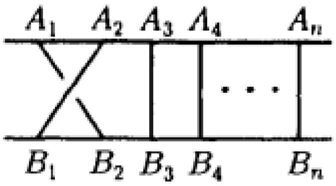


Figura 1: Trança com 1corda(*1*-trança),
Trança com 2 corda (*2*-trança) e
Trança com 4 cordas (*4*-trança).

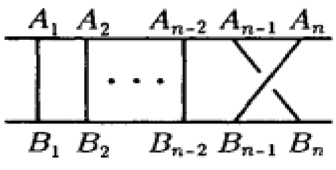
Duas tranças são ditas equivalentes se é possível transformar uma trança em outra trança movimentando apenas suas cordas, sem desconectar os pontos inicias e os pontos finais.

As classes de equivalências dessas configurações de tranças, associadas à operação de composição, formam um grupo. Esse grupo é usualmente denotado por B_n, onde n representa o número de segmentos que formam a trança.

O grupo B_n é gerado pelas tranças $(\sigma_1, ..., \sigma_{n-1})$, onde σ_i é a trança com um único cruzamento entre a i-ésima e $(i+1)$-ésima corda, como na figura **2**.



σ_1



σ_{n-1}

Figura 2: Tranças geradoras de B_n

A apresentação usual de B_n é dada por:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \ \mathit{para}\ 1 \le i \le n-2, \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \ \mathit{para}\ |i-j| \ge 2 \right\rangle$$

Com as relações estabelecidas nas apresentações de um grupo conseguimos entender algebricamente como este funciona e podemos estabelecer várias propriedades interessantes de forma a entender mais profundamente determinado grupo.

O centro de um grupo G, denotado por Z(G), é o subgrupo de G formado pelos elementos de G que comutam com todos os elementos de G, ou seja,

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall\, y \in G\}.$$

Em nosso trabalho também estudamos a demonstração apresentada por Gonzáles-Meneses (2011) de que o centro de B_n é gerado pelo elemento $(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})^n$, embora esse estágio da pesquisa ainda esteja em andamento.

O elemento gerador do centro $(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})^n$ é chamado de "**full twist**". Geometricamente, podemos representar um full twist de B_5 da seguinte maneira:

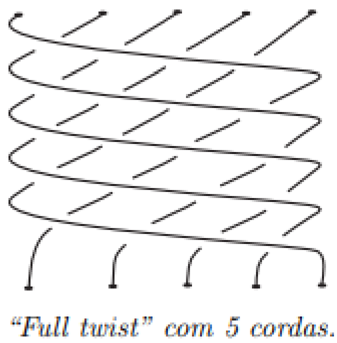


Figura 2: Trança $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^5$, geradora do centro de B_5

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

Através da iniciação científica, foi possível compreender com profundidade as construções de grupos de tranças, tanto algébrica quanto topológico-geométrica, além de várias propriedades importantes desses grupos. Além disso, estamos em processo de estudar o centro dos grupos de tranças com mais profundidade.

REFERÊNCIAS

OCAMPO, O. "Os grupos de tranças de Artin". Notas de minicurso, 2014.

MURASUGI, K. & KURPITA, B. "A study of braids". Springer Science & Business Media, 2012.

PEREIRO, C. M. “Minicurso – Grupos de Tranças”. Disponível em https://sites.google.com/site/iijbta/resumos.
GONZÁLEZ-MENESES, J. “Basic results on braid groups”. Annales mathématiques Blaise Pascal , 18 no. 1 (2011), p. 15-59.