UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto n°17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA - 2019

UMA FORMULAÇÃO EM DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO DE PLACAS FINAS PARA MALHAS IRREGULARES

Danielli da Silveira Cruz França[1]; Geraldo José Belmonte dos Santos[2]

1. Bolsista FAPESB, Graduando em Engenharia Civil, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: danielli_10@hotmail.com

2. Orientador, Departamento de Tecnologia, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: g.belmonte@ig.com.br

PALAVRAS-CHAVE: diferenças finitas, malhas irregulares, flexão de placas

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática está se destacando cada vez mais nos últimos anos no estudo de problemas de Engenharia e Ciência. Segundo Biembengut (2014), modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo de representação de um fenômeno da realidade. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento da Matemática e Física, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

Os modelos matemáticos, em geral, só podem ser resolvidos numericamente através de um algoritmo implementado no computador. Dentre os métodos computacionais tem-se o método das diferenças finitas energéticas (MDFE) o qual gera as equações discretas de equilíbrio que governam o problema. O método é desenvolvido a partir da forma fraca (ou variacional) das equações governantes, ao contrário do método clássico das diferenças finitas (MDF) que utiliza a forma forte (equações diferenciais). Tal formulação fraca tem a vantagem de redução da ordem das derivadas, diminuindo, assim, o tamanho stencil gerado e o consequente esforço computacional, além de construir um novo framework para a análise de erro, considerando o atendimento das equações em média como no método dos elementos finitos (MEF).

Santos, Loula e Santos (2016) introduziram uma estratégia para geração de stencil compacto de alta ordem para aproximação de operadores de Laplace, obtendo-se aproximação de 6ª ordem com 9 pontos apenas, quando a formulação clássica gera uma aproximação de 2ª ordem. Além disso, mostra que é possível, para o mesmo operador, obter-se stencil de 2ª ordem para malhas irregulares. Considerando o problema de Laplace no domínio bidimensional (x,y), dado pela equação diferencial parcial de uma variável escalar $u = (x, y)$:

$$Lu(x, y) = f(x, y),$$

onde $L = \Delta$, tem-se a aproximação em diferenças finitas no ponto (x_i, y_i), dada por:

$$Lu(x_i, y_i) \approx \sum_{j \in A_i} c_j u(x_j, y_j)$$

onde A_i é o conjunto dos n pontos usados para geração do *stencil* do ponto (x_i, y_i), incluindo-o. O valor de c_j, com $j \in A_i$, é calculado de forma que o valor do operador L sobre a variável u no ponto (x_i, y_i), seja dado como combinação linear dos valores da função u , avaliados nos pontos (x_i, y_i) pertencentes a uma vizinhança A_i de (x_i, y_i). A aproximação do operador na sua forma forte pode ser substituída pela sua versão na forma fraca, versão assim chamada de diferenças finitas energéticas, tendo a vantagem de reduzir a ordem das derivadas aproximadas.

O cálculo de c_j, coeficientes do *stencil* de diferenças finitas em (x_i, y_i), pode ser realizado de diversas formas. A expressão direta, realiza a substituição da variável u por cada uma das m funções bases em B_i avaliadas no ponto (x_i, y_i). Usando uma base B_i com m funções φ_k,

$$B_i = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\},$$

Obtém-se para cada φ_k, k=1,...,m, uma equação,

$$\sum_{j \in A_i} c_j \varphi_k(x_j, y_j) = L\varphi_k(x_i, y_i) \quad ,$$

a qual é avaliada no ponto i, resultando em um sistema de m equações algébricas lineares e n incógnitas c_j. Para m = n tem-se um sistema resolvido diretamente, porém quando m > n tem-se que resolver o problema por aproximação de mínimos quadrados.

Baseado nos resultados do operador de Laplace, pode-se propor um stencil de diferenças finitas para a flexão de placas finas (teoria de Kirchhoff-Love). As placas são elementos estruturais que podem ser modelados bidimensionalmente, de forma que a espessura do elemento seja consideravelmente menor do que as demais dimensões.

A Teoria Clássica de Placas baseia-se na Teoria de Kirchhoff onde as placas são consideradas delgadas e os deslocamentos pequenos em relação às dimensões do elemento estrutural.

As relações cinemáticas, ou seja, os deslocamentos e deformações são dados por:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{v\sigma_y}{E} \qquad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{v\sigma_x}{E} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy}\frac{2(1+v)}{E}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{v}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \neq 0 \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \neq 0$$

As expressões de momentos são dadas por:

$$M_x = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \qquad M_y = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$$

Em que:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}$$

Analogamente para os momentos torsores:

$$M_{xy} = -D(1-v)\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -M_{yx}$$

As equações de equilíbrio em relação a x, em relação a y e em relação a z são das, respectivamente, por:

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0 \qquad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \qquad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

É possível condensar essas equações em uma única equação diferencial que descreverá o comportamento da placa por completo. Essa é a Equação diferencial de Lagrange, conhecida por Equação diferencial da teoria clássica das placas é dado por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}.$$

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

Foi utilizado o software Maple, programa desenvolvido por Waterloo University Inc., Canadá, e pelo instituto ETH, de Zurique, Suíça. É um sistema de computação algébrica, numérica e gráfica, desenhado para uso profissional na resolução de problemas que exigem métodos matemáticos.

O maple é uma linguagem de computação algébrica e simbólica, muito potente em termos de computação algébrica e numérica de alguns tópicos da matemática. Constitui um ambiente informático para a computação que permite o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

A equação diferencial (forma forte) bi-harmônica de flexão de placas é dada por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

onde q representa a intensidade da carga aplicada e D representa a rigidez da flexão para placas.

Vemos que há uma equação diferencial de quarta ordem, é mais fácil substituir por duas equações de segunda ordem que representam as flechas de uma membrana, como pode ser visto:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\frac{q}{D}$$

Com as equações de momento dadas anteriormente, podemos ver que:

$$M=\frac{M_x+M_y}{1+v}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

Substituindo, teremos que:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}=-q$$

E aplicando o método das diferenças finitas teremos que:

$$M_{(xi+h,yi)}+M_{(xi,yi+h)}+M_{(xi,yi-h)}-4M_{(xi,yi)}=-qh^2$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

É possível concluir que a Teoria Clássica de placas consegue representar o problema para placas delgadas, porém, para placas espessas, o cisalhamento deve ser considerado.

A equação diferencial de Flexão de Placas é de quarta ordem, podendo ser transformada na multiplicação de 2 equações de segunda ordem e assim, aplicar o método das diferenças finitas.

REFERÊNCIAS

Wikipedia. **Maple**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Maple. Acesso em: 2 de agosto de 2019.

CUMINATO, J. A. Discretização de Equações Diferenciais Parciais.

SANTOS, J. D. B.; LOULA, A. F. D.; SANTOS, G.J.B. Geração de aproximações de diferenças finitas em malhas não uniformes para as EDP's de Laplace e Helmholtz. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2016.

LISZKA, T .; ORKISZ, J. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. Computers & Structures, v. 2, pp. 83-95, 1980.

LIU, G. R.; GU, Y. T., A point interpolation method for two-dimensional solids, International Journal of Numerical Methods Engineering, v. 50, pp. 937-951, 2001.

PERRONE, N. & KAO, R. A general finite difference method for arbitrary meshes, Catholic University Of America, Computers & Structures, v. 5, pp. 45-58, 1975.