SITIENTIBUS SÉRIE CIÊNCIAS FÍSICAS [ARTIGO]

Sobre a Interpolação e o Uso nas Atividades do Programa de Pós-Graduação em Astronomia

On the Interpolation and the Use in Activities of the Astronomy Graduate Program

Paulo César da Rocha-Poppe ,* Vera Aparecida Fernandes-Martin , e Marildo Geraldête Pereira
Departamento de Física, Observatório Astronômico Antares – UEFS
Av. Transnordestina, s/n, Feira de Santana – BA – 44036-900

Mariângela de Oliveira-Abans, Max Faúndez-Abans
MCTIC/Laboratório Nacional de Astrofísica
R. Estados Unidos, 154, Bairro das Nações, Itajubá – MG – 37504-364

Priscila Freitas-Lemes
UNIVAP, Universidade do Vale do Paraíba
Av. Shishima Hifumi, 2911, São José dos Campos – SP – 12244-000

Abelardo Pedro Nobre Junior
Instituto Federal de Alagoas, Campus Murici
Loteamento Prefeito Pedro Tenório Raposo, Km 57, s/n, Murici – AL – 57820-000

Adaltro José Araújo Silva
Colégio Estadual Wilson Lins
Pç. Nemésio Martins Silva, 476, Valente – BA – 48890-000

Ana Cláudia Santana Bomfim Sant'Anna
Colégio Estadual Maria Teófila
R. Maria da Purificação Azevedo, 62, Centro, Amélia Rodrigues – BA – 44230-000

Andréa Amaral de Souza Carvalho
Centro Integrado de Educação Assis Chateaubriand
R. Arivaldo de Carvalho, s/n, Sobradinho, Feira de Santana – BA – 44028-120

Anna Paula Alencar, Gleide Miriam Falcão Brito
Centro Estadual de Educação Profissional em Saúde do Centro Baiano
R. Juraci Magalhães Jr., s/n, Centro, Feira de Santana – BA – 44135-000

João Jośe da Silva Carrilho
Colégio Anísio Teixeira
R. Brigadeiro Eduardo Gomes, 356, Ponto Central, Feira de Santana – BA – 44100-000

Jucelia Silva dos Santos
Colégio Estadual Carmen Andrade Lima
R. Arivaldo de Carvalho, 886, Sobradinho, Feira de Santana – BA – 44021-225

Katyuscya Ferreira Barreto
Centro Juvenil de Ciência e Cultura
Av. Rio de Janeiro, 156, Pedra do Descanso, Feira de Santana – BA – 44007-095

Marcelo Lago Araújo
Agência Nacional de Telecomunicações
R. Alceu Amoroso Lima, 822, Caminho das Árvores, Salvador – BA – 41820-770

Milena Pereira Silva
Colégio Estadual São José
R. São Vicente de Paulo, 198, Centro, Santa Bárbara – BA – 44150-000

Paulo Marcos Santiago Bastos
Centro Estadual de Educação Profissional em Saúde Anísio Teixeira
Ladeira do Paiva, 40, Caixa d'Água, Salvador – BA – 40313-430

Rodrigo Santa Cruz Ferreira
Colégio Estadual Conceição do Jacuípe
R. Castro Alves, 229, Centro, Conceição do Jacuípe – BA – 44245-000
(SUBMETIDO:[05/06/2022] - ACEITO:[21/08/2022] - PUBLICADO:[28/11/2022])

A Astronomia representa uma área do conhecimento científico que trabalha constantemente com dados numéricos, oriundos de observações (espectroscopia, fotometria, polarimetria) ou de modelos físico-matemáticos. Portanto, analisar e interpretar dados de natureza científica obtidos a partir da leitura de gráficos e/ou tabelas representa uma tarefa bastante comum para o(a) astrônomo(a). Muitas vezes, existe a necessidade de se conhecer, por exemplo, a coordenada de um objeto para uma certa data (ano, mês, dia, hora, minuto e segundo) de observação. Em outros casos, durante a fase de aquisição, processos alheios podem acontecer e ocasionar o comprometimento, parcial ou total, da informação astronômica desejada, o que pode prejudicar uma posterior análise (local ou global) do fenômeno estudado. Como o método de Interpolação representa um tema de estudo que faz parte do processo de formação dos futuros mestres do Programa de Pós-Graduação em Astronomia, modalidade Mestrado Profissional (MPASTRO) do Departamento de Física da UEFS, julgamos apropriado apresentar uma pequena contribuição sobre o método de interpolação no contexto da Astronomia. Uma análise também é feita nas habilidades previstas na BNCC (Base Nacional Comum Curricular).

Palavras-chaves: Astronomia; Interpolação; Dados Observacionais; BNCC.

Astronomy represents an area of scientific knowledge that constantly works with numerical data, derived from observations (spectroscopy, photometry, polarimetry) or from physical-mathematical models. Therefore, analyzing and interpreting data of a scientific nature obtained from graphs and or tables represents a very common task for the astronomer. Often, there is a need to know, for example, the coordinate of an object for a certain date (year, month, day, hour, minute and second) of observation. In other cases, during the acquisition phase, extraneous processes can happen and cause the partial or total commitment of the desired astronomical information, which can harm a later analysis (local or global) of the phenomenon studied. As the Interpolation method represents a topic of study that is part of the training process for future Masters of the Postgraduate Program in Astronomy, Professional Master's in Astronomy (MPASTRO) of the Physics Department of UEFS, we consider it appropriate to present a small contribution on the Interpolation method in the context of Astronomy. An analysis is also carried out on the skills provided for in the BNCC (National Curricular Common Base).

Keywords: Astronomy; Interpolation; Observational Data; BNCC.

I. Introdução

A Matemática representa o alicerce de estudo para todas as áreas do conhecimento humano, tornando-a, dessa maneira, fundamental na formação de todos os estudantes que trilham à Educação Básica e que seguem o Ensino Superior (ou ainda uma Pós-Graduação).

Esta enfática e importante característica não é apenas um aspecto para destacar a urgente e necessária defesa e valorização contra o cenário de reformulação negativa que o sistema

* Endereço Eletrônico: paulopoppe@uefs.br

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i-8292

de ensino brasileiro vem atravessando (e sendo intensificado) ao longo do tempo. Na verdade, o emprego da Matemática em várias aplicações é muito antiga e remonta, no mundo ocidental, ao Antigo Egito e o Império Babilônico, civilizações que datam cerca de 3.500 a.C.

Os filósofos da Grécia antiga também deram uma importante contribuição para a Matemática, ancorada, por exemplo, nos trabalhos de Thales de Mileto (c. 624-546 a.C), Anaximandro (c. 610-546 a.C.), Pitágoras (c. 571-496 a.C.), Demócrito de Abdera (c. 460-371 a.C.) e Euclides de Alexandria (c. 300−? a.C.). Contudo, é importante ressaltar que não temos acesso a grande maioria dos antigos textos egípcios, babilônicos, gregos ou de outras civilizações. Uma parcela significativa foi perdida e as informações que ora dispomos são traduções feitas para outros idiomas, a exemplo do árabe.

Embora tenhamos um interessante campo histórico de estudo sobre o desenvolvimento da Matemática na Antiguidade, envolvendo desde conquistas territoriais a tensões religiosas que atravessaram diferentes culturas, salientamos que foi na era Cristã com o astrônomo, físico e engenheiro florentino Galileo di Vincenzo Bonaulti de Galilei, mais conhecido como Galileu Galilei (1564-1642), que temos o registro histórico da célebre frase "*A Matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o Universo*", ou seja, a criação de uma linguagem universal que permitiu a construção de um meio extremamente eficaz de comunicar ideias sobre os mais variados fenômenos da natureza.

No caso particular da Astronomia, destacamos um casamento mais que perfeito entre a ciência que se ocupa de estudar o Universo em todas as escalas de espaço e tempo e as diversas ferramentas que permitem subsidiar os vários campos de estudo desta ciência, a exemplo da Astronomia de Posição, Mecânica Celeste, Astrofísica e Cosmologia.

No Mestrado Profissional em Astronomia (MPASTRO), os vários Componentes Curriculares propostos de formação pós-graduada (obrigatórios e optativos) encontram-se referenciados na BNCC (Base Nacional Comum Curricular [1]), o documento normativo para as redes de ensino (públicas e privadas) e obrigatório para elaboração dos currículos e propostas pedagógicas. Neste, as competências específicas de Matemática (e suas Tecnologias) para a Educação Infantil e os Ensinos Fundamental e Médio estão explicitamente postas. Por exemplo, de acordo com o item 4.2 da BNCC para o Ensino Fundamental, "*o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais*" [2].

Nesta fase do ensino, o estudante é levado ao conhecimento de diversos campos da Matemática, como a Aritmética, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, envolvendo, naturalmente, observações empíricas do mundo real e a consequente materialização em representações como tabelas, gráficos, figuras e esquemas.

Ao chegar no Ensino Médio, a BNCC propõe ao estudante "*a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade*".

Os aspectos descritos acima apresentam e, portanto, justificam, os elementos essenciais para que possamos abordar o tópico proposto para esta contribuição acadêmica, Interpolação, fomentando, dessa maneira, os estudantes do MPASTRO com um conhecimento que envolve não apenas a resolução de problemas astronômicos, mas também de elementos para a investigação científica, o desenvolvimento de projetos e de modelagem numérica.

Em geral, os métodos mais usados envolvem a Regra de Simpson, para Integração Numérica, os Métodos de Euler e Runge-Kutta, para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, o Spline3 (cúbico) e os Métodos de Lagrange, Newton e Hermite no campo da Interpolação. Contudo, não iremos explorar tais ferramentas neste momento e o leitor interessado encontrará robustas discussões em [3–11]. Em particular, uma cronologia da Interpolação envolvendo aspectos clássicos e modernos da Astronomia, como o processamento do sinal e imagem, pode ser encontrado em [12], incluindo uma vasta lista de referências. Em adição, um livro (no formato PDF) colaborativo de Cálculo Numérico, Versão Octave, pode ser obtido no seguinte link [13].

Para este trabalho e voltado para o uso nas atividades do MPASTRO, a metodologia adotada consiste em organizar os dados em Tabelas, construir as Diferenças Sucessivas e aplicar a conhecida Fórmula de Bessel que apresenta certas vantagens sobre a fórmula de Gauss, por exemplo, se a interpolação estiver no meio do segmento, todos os coeficientes nas diferenças de ordens ímpares desaparecem [11, 14]. Portanto, o método escolhido e praticado no MPASTRO oferece robustez suficiente para interpolar com bastante precisão as Efemérides presentes no "*The Astronomical Almanac [15]*", um almanaque publicado pelo United States Naval Observatory (Observatório Naval dos Estados Unidos - USNO) e pelo *Her Majesty's Nautical Almanac Office* (Escritório do Almanaque Náutico de Sua Majestade - HMNAO [16]), sendo considerado uma preciosa fonte de dados astronômicos fundamentais. Ainda, é importante salientar que, na maioria das vezes, representa a primeira publicação a incorporar novas resoluções da União Astronômica Internacional (IAU [17]). O almanaque contém em grande parte Efemérides do Sistema Solar e catálogos selecionados de objetos estelares e extragalácticos.

Esta contribuição objetiva subsidiar algumas das atividades desenvolvidas nos Componentes Curriculares do MPASTRO e está planejada da seguinte maneira. A Seção II pontua a Interpolação na BNCC e aborda aspectos gerais das Progressões Aritméticas e Geométricas que devem ser apresentadas aos estudantes do Ensino Médio. Na Secção III, tratamos especificamente da Interpolação Numérica empregando exemplos astronômicos. Uma breve discussão sobre Extrapolação é apresentada na Seção IV. As Discussões Gerais e as Conclusões Finais são apresentadas, respectivamente, nas Seções V e VI.

II. Progressões Aritméticas e Geométricas na BNCC

O público alvo esperado no MPASTRO é formado por professores de diversas áreas do conhecimento, como Biologia, Filosofia, Física, Geografia, História, Informática, Matemática, Pedagogia e Química, oriundos da Educação Básica e/ou do Ensino Superior, além daqueles profissionais presentes em Centros e Museus de Ciências, o que acaba exigindo a elaboração de uma linguagem coloquial que alcance os conhecimentos individuais previamente estabelecidos [18, 19]. Na verdade, estamos assumindo como expectativa que os conhecimentos prévios existentes possam ser aprofundados a partir dos conteúdos científicos ora apresentados.

Embora uma parcela deste público não trabalhe com conteúdos de Matemática no cotidiano da sala de aula, salientamos que os mais variados temas de Astronomia tratados no MPASTRO necessitam de conhecimentos mínimos da Matemática, como o Cálculo, a Trignometria Esferérica, a Geometria, etc. Portanto, diante deste contexto, escolhemos abordar nesta contribuição o tema de Interpolação que, de forma muito simplificada, significa calcular um valor numérico e colocá-lo entre outros previamente conhecidos, organizados, por exemplo, em uma Tabela.

A BNCC não trata explicitamente do método de Interpolação, mas aborda as Progressões Aritmétrica (PA) e Geométrica (PG), o caminho natural a seguir, descritas com as seguintes Habilidades:

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e re-

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i-8292

solução de problemas.

Explorando essas duas Habilidades, vemos que as aplicações encontram-se consolidadas nas mais diversas áreas do conhecimento humano, sendo, portanto, fundamentais para a compreensão de vários fenômenos da natureza, além daqueles de ordens econômicas e sociais. Portanto, representam conteúdos importantes e devem integrar os livros didáticos que, apropriando-se das respectivas Habilidades, possibilitam o desenvolvimento em qualquer ano da Educação Básica.

No contexto da História da Matemática [20, 21], a Álgebra babilônica já incorporava os primeiros estudos sobre Sequências Numéricas, fundamental para o nosso ponto de partida, permitindo, assim, pautar as Progressões e introduzir o conceito de Interpolação.

II.1. Progressão Aritmética

Na Matemática, uma Sequência Numérica é definida como um conjunto onde os elementos, chamados de termos, estão dispostos em uma determinada ordem. Como exemplo, apresentamos a Sequência formada por cinco termos: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$, onde a_1 é o primeiro termo e a_5 o quinto termo.

Uma Sequência pode ser finita, como o exemplo acima, ou infinita, contendo infinitos termos, como a sequência de números pares: $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots$, ou de números ímpares: $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\ldots$.

Observe que, em qualquer uma das duas Sequências dos exemplos acima, a subtração de cada termo em relação ao termo anterior, a partir do segundo, a_2, ou seja, a_2, $-a_1$, a_3, $-a_2$, etc., fornecerá sempre um valor constante igual a 2. Sequências que obedecem essa relação são denominadas de Progressões Aritméticas, PA, sendo o valor constante (neste caso 2) a razão, r, definida na forma $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots$ $= a_n - a_{n-1} = r$.

Do exposto, definimos uma PA como sequências de números reais em que a diferença entre cada termo, a partir do segundo e o termo anterior, apresenta um valor constante denominada de razão, r, que pode ser classificada em crescente ($r > 0$), decrescente ($r < 0$) e constante ($r = 0$), onde, neste último caso, todos os termos são iguais, por exemplo, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 8$.

A definição acima permite escrever uma importante equação geral que possibilita determinar um termo qualquer da PA, desde que seja conhecido o primeiro termo e a razão r. Então, considere uma PA com os seguintes termos:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n\ , \tag{1}$$

de modo que, pela definição,

$$a_2 = a_1 + r,\ a_3 = a_2 + r,\ a_4 = a_3 + r, \ldots$$

ou ainda, reescrevendo os termos

$$a_3 = a_1 + r + r = a_1 + 2r, \tag{2}$$

$$a_4 = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r, \tag{3}$$

$$\ldots$$

podemos escrever a equação geral,

$$a_n = a_1 + (n-1)r\ , \tag{4}$$

para determinar um termo qualquer da PA, para introduzir o conceito de Interpolação e de algumas propriedades básicas.

II.1.1. Interpolação Aritmética

O método de interpolar meios aritméticos (ou geométricos) entre dois números reais dados (extremos conhecidos) significa determinar números reais entre estes, de forma que a sequência numérica real formada seja uma PA (ou uma PG). Logo, através da Interpolação, é possível construir uma função que se “encaixe”, de forma aproximada, nos dados (experimentais) discretos, conferindo-lhes, assim, a continuidade desejada. Como exemplo, vamos considerar a seguinte sequência numérica,

$$6,\ \text{x},\ \text{x},\ \text{x},\ \text{x},\ \text{x},\ \text{x},\ \text{x},\ 46,$$

cujo problema consiste em descobrir os sete números faltantes (x) da PA. Neste caso, a teoria nos diz que necessitamos da razão (r), do primeiro termo ($a_1 = 6$), do número de termos ($n = 9$) e do último termo ($a_n = a_9 = 46$), todos relacionados pela Eq.(2).

Das variáveis presentes, desconhecemos apenas r (razão), mas que pode ser facilmente determinada substituindo os valores conhecidos em (2), o que conduz à $r = 5$. Logo,

$$a_n = a_1 + 5(n-1). \tag{5}$$

Agora, substituindo o valor de n para os termos faltantes, ou seja, de $n = 2$ até $n = 8$, preenchemos facilmente a sequência proposta:

$$a_1 = 6,\ a_2 = 11,\ a_3 = 16,\ a_4 = 21,\ a_5 = 26,$$
$$a_6 = 31,\ a_7 = 36,\ a_8 = 41,\ a_9 = 46.$$

Do exposto, esta simples descrição fornece os elementos suficientes e necessários para apresentarmos o conceito de Interpolação Aritmética em sala de aula.

De forma objetiva, interpolar (ou inserir) k termos entre dois termos extremos a_1 e a_n de uma PA, significa obter a PA com $n = k + 2$ termos. Vejamos este outro exemplo: Interpole 5 termos entre os termos extremos $a_1 = 3$ e $a_7 = 39$. Logo, a PA terá $n = 5 + 2 = 7$ termos, com $k = 5$. Aplicando a Eq.(2) temos,

$$\begin{aligned} &a_7 = a_1 + r\ (n-1), \\ &\Rightarrow 39 = 3 + r\ (7-1)\ , \end{aligned}$$

o que fornece $r = 6$. Assim, a PA será formado com os termos:

$$a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_3 = 15,$$
$$a_4 = 21,\ a_5 = 27,\ a_6 = 33,\ a_7 = 39,$$

onde os valores de a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 são os resultados da Interpolação Aritmética.

II.1.2. Propriedades da PA

Uma análise sobre o resultado obtido para a PA descrita acima permite-nos descrever duas importantes propriedades:

(i) Soma dos Termos Equidistantes:

$$a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = 42.$$

Logo, em relação ao termos central $a_4 = 21$, a soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA é igual à soma desses extremos, neste caso, 42.

(ii) Média Aritmética:

$$a_2 = \frac{(a_1 + a_3)}{2},\ a_3 = \frac{(a_2 + a_4)}{2},\ \ldots$$

ou de forma geral, para $n \geq 1$:

$$a_{i+1} = \frac{(a_i + a_{i+2})}{2}\ , \tag{6}$$

se a_i, a_{i+1} e a_{i+2} forem termos reais consecutivos de uma PA.

II.1.3. Soma dos Termos da PA

A maneira que hoje empregamos para somar os termos de uma PA finita, S_n, foi apresentada pela primeira vez na segunda metade do Séc. XVIII pelo matemático, físico, e astrônomo Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Mas, embora fosse uma criança na época citada, formulou corretamente a equação matemática,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2}\ n, \tag{7}$$

que fornece a soma dos termos da PA. Dessa forma, a soma dos termos de uma PA finita é obtida por meio da semissoma dos termos extremos multiplicada pelo número n de termos.

II.2. Progressão Geométrica

Como visto acima, uma PA pode ser tratada como uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o termo anterior a uma determinada constante, chamada de razão (r). Na mesma linha, a PG representa uma sequência numérica de números reais na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma determinada constante, também

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i-8292

denominada de razão (q). Exemplificando, se a sequência,

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n\ ,$$

representar uma PG, então:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q\ . \qquad (8)$$

Uma PG pode ser classificada como crescente, decrescente, constante e oscilante. No caso em que cada termo é maior que o anterior, ou seja, em uma sequência crescente, podemos ter as seguintes situações:

$$(a)\ a_1 > 0 \ \text{ e } \ q > 1 \iff (3, 6, 12, 24, 48, \ldots)\ ,$$
$$(b)\ a_1 < 0 \ \text{ e } \ 0 < q < 1$$
$$\iff (-4, -2, -1, -1/2, -1/4, \ldots)\ .$$

Para uma sequência decrescente, onde cada termo é menor que o anterior, teremos:

$$(a)\ a_1 > 0 \ \text{ e } \ 0 < q < 1 \iff (1, 1/3, 1/9, \ldots)\ ,$$
$$(b)\ a_1 < 0 \ \text{ e } \ q > 1 \iff (-3, -6, -12, \ldots).$$

Se todos os termos tratados na PG forem iguais, positivos ou negativos, teremos uma sequência constante cuja a razão será sempre 1, por exemplo, $(8, 8, 8, ...)$ ou $(-8, -8, -8, \ldots)$.

Finalmente, se o sinal dos termos na sequência oscilarem, positivo e negativo ou vice-versa, teremos uma PG oscilante:

$$(1, -3, 9, -27, \ldots) \ \text{ ou } \ (-2, 6, -18, 54, \ldots)\ .$$

Os termos de qualquer uma das PG apresentadas acima podem ser obtidos através de uma fórmula geral, desde que sejam fornecidos o 1° termo e a razão q. Vejamos. Considere uma PG crescente com 7 termos $(a_1 \ldots a_7)$ e de razão $q = a_n/a_{n-1} = 2$, ou seja:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 8,$$
$$a_5 = 16,\ a_6 = 32,\ a_7 = 64.$$

O termo geral ou o número total de termos podem ser obtidos analisando a sequência acima,

$$a_2 \ = \ a_1\ q,\ a_3 = a_2\ q,\ a_4 = a_3\ q,$$
$$a_5 \ = \ a_4\ q,\ a_6 = a_5\ q,\ a_7 = a_6\ q\ .$$

Do exposto, cada termo dessa PG pode ser escrito em função de um produto entre o primeiro termo e uma potência da razão, ou seja:

$$a_1 = a_1\ q^0,\ a_2 = a_1\ q^1,\ a_3 = a_1\ q^2,$$
$$a_4 = a_1\ q^3,\ a_5 = a_1\ q^4,\ a_6 = a_1\ q^5,$$
$$a_7 = a_1\ q^6\ .$$

Então, sabendo que o expoente da razão q sempre será igual ao índice do termo em questão menos 1, é possível escrever uma relação que permita determinar o enésimo termo,

$$a_n = a_1\ q^{n-1}\ , \qquad (9)$$

Por exemplo, para determinar o próximo termo da PG, a_8, basta fazer (com $n = 8$),

$$a_8 = a_1\ 2^{8-1} \Rightarrow a_8 = 1\ 2^7 = 128\ . \qquad (10)$$

No caso do número de termos, considere uma PG com $q = 4$, $a_1 = 3$ e $a_n = 768$. Então, usando a Eq.(7), teremos:

$$a_n = a_1\ q^{n-1} \Rightarrow 768 = 3\ 4^{n-1},$$
$$\Rightarrow 256 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^4 = 4^{n-1}.$$

Logo:

$$4 = n - 1 \Rightarrow n = 5.$$

II.2.1. Interpolação Geométrica

Como visto no caso da PA, vamos considerar uma sequência numérica real composta por n = 6 termos, onde apenas os termos extremos, $a_1, = 5$ e $a_n = 160$, são conhecidos. Empregando a Eq.(7) e o exemplo acima, descobrimos que a razão vale q = 2, permitindo, facilmente, determinar os demais termos e a sequência:

$$5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 80,\ 160.$$

II.2.2. Soma dos Termos da PG

A soma dos termos de uma PG de n termos, portanto, finita,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n\ ,$$

é obtida através da relação matemática:

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \,, \tag{11}$$

com $q \neq 0$ e $q \neq 1$. Mas, se os termos de uma PG decrescente tenderem ao infinito ($n \to \infty$), como no exemplo,

$$2,\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{25},\ \frac{2}{125},\ \frac{2}{625},\ \frac{2}{3125},\ \frac{2}{15625},\ \ldots$$

podemos concluir que o último termo tenderá, em último caso, para zero. Do exposto, com $-1 < \mathrm{q} < 1$, $a_1 \neq 0$ e $\mathrm{n} \mapsto \infty$, teremos, a partir da relação (9):

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q} \,, \tag{12}$$

com as seguintes observações:

(a) Se $a_1 = 0$, então $\mathrm{S}_n = 0$,

(b) Se $a_1 \neq 0$ e $\begin{cases} q \leq -1 \therefore\to -\infty \\ q \geq +1 \therefore\to +\infty \end{cases}$

II.2.3. Propriedades da PG

Duas importantes propriedades podem ser destacadas:

(a) Em uma PG, cada termo na sequência numérica real representa a média geométrica [22] entre os termos anterior e posterior. Então, recuperando a PG anterior,

$$5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 80,\ 160,$$

teremos:

$$10 = \sqrt{5.20};\ 20 = \sqrt{10.40};\ 40 = \sqrt{20.80}; = \ldots$$

(b) Na PG acima, podemnos escrever:

$$5.160 = 10.80 = 20.40,$$

de tal modo que:

O produto dos termos equidistantes dos extremos de uma PG é igual ao produto destes extremos.

III. Interpolação Numérica

De forma resumida, os métodos de interpolação podem ser agrupados em cinco classes:

(i) Linear: representa a mais simples de todas, como ilustrado nos exemplos acima,

(ii) Polinomial: neste caso, a função interpoladora, f(x), é um polinômio;

(iii) Trigonométrica: trata-se de uma interpolação polinomial onde o Polinômio é trigonométrico;

(iv) Spline: trata-se de uma curva definida por dois ou mais pontos, bastante usada nos processos de redução de dados astronômicos;

(v) Bilinear: pode ser vista como uma generalização da interpolação linear de uma variável para funções de duas variáveis.

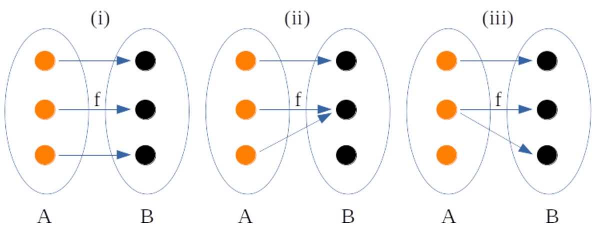

FIGURA 1. Exemplos de conjuntos que representam funções, (i) e (ii). O conjunto (iii) não representa uma função, de acordo com a descrição apresentada no item III.

A aplicabilidade, de cada classe, irá depender da natureza do conjunto de dados considerado que, em geral, são organizados em Tabelas, o que facilita a análise e a interpretação do problema tratado. Os dados podem representar, por exemplo, uma função que corresponde a uma associação entre os elementos de dois conjuntos, indicando como cada elemento está relacionado. Um exemplo clássico está represenado na Figura 1, entendendo que uma função (f) de A em B significa associar cada elemento pertencente ao conjunto A a um único elemento que compõe o conjunto B, de tal

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i-8292

TABELA I. Valores atribuídos ao argumento x na função $y = f(x) = 2x$. O termo 'a' na última coluna, representa as diferenças primeiras da função y, ou seja, $y_i - y_{i-1}$.

x	y	a
$x_1 = 0$	$y_1 = 0$	$a_2 = 6$
$x_2 = 3$	$y_2 = 6$	$a_3 = 6$
$x_3 = 6$	$y_3 = 12$	$a_4 = 6$
$x_4 = 9$	$y_4 = 18$	$a_5 = 6$
$x_5 = 12$	$y_5 = 24$	$a_6 = 6$
$x_6 = 15$	$y_6 = 30$	...

modo que um valor de A não pode estar ligado a dois valores de B. Neste caso, o conjunto (iii) não representa uma função.

A partir do exemplo acima, vamos supor que os conjuntos A e B estejam relacionadas entre si por uma dependência matemática simples, do tipo, $y = 2x$, de modo que, ao variar uma grandeza, neste caso x, também irá variar a outra, y. A grandeza que varia arbitrariamente é denominada de argumento e a grandeza que depende deste argumento é a função, de modo que se fica estabeleccido a relação $y = f(x)$. No exemplo citado, x é o argumento e y a função. Desse modo, para o valor do argumento $x = 1$, teremos $y = 2$; para o valor $x = 3$, $y = 6$, etc., construindo assim uma sequência numérica.

Os cálculos realizados acima são geralmente, como mencionado na Introdução, organizados e expressos em tabelas e, no caso particular da função $y = 2x$, assumindo como exemplo valores crescentes de x de razão 3, iremos encontrar para y valores com o dobro da razão (Tabela I).

O tratamento acima permite determinar apenas os valores de y para uma razão crescente de x. No entanto, esse resultado não fornece diretamente, por exemplo, os valores para $x = 5$, 7 ou 9, isto é, intermediários. Como resolver esse problema? Este é um exemplo clássico de Interpolação e, na Astronomia, é muito usado nas tabelas envolvendo Calendários, Equação do tempo, Sistemas de Coordenadas, etc.

Se as variações da função são diretamente proporcionais as variações do argumento, conforme o exemplo acima, o problema pode ser solucionado de maneira bastante simples. Para termos certeza de que a função varia de modo proporcional ao argumento, devemos calcular as diferenças primeiras que devem ser constantes (todas iguais). No exemplo, $a = 6$ (veja Tabela I). Deste modo, a determinação dos valores intermediários da função se reduzem a solução de uma simples equação do tipo:

$$y = y_i + a_{i+1}\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\ . \tag{13}$$

A título de exemplo, qual o valor de y para $x = 10$? Neste caso, teremos que calcular entre x_4 e x_5. Logo, $i = 4$ e $i + 1 = 5$, o que fornece:

$$y = y_4 + a_5\ \frac{x - x_4}{x_5 - x_4} = 20\ . \tag{14}$$

Obviamente, como a função de partida é bem simples, $y = 2x$, bastava apenas multiplicar. Mas, nem todos os problemas serão simples assim. Por exemplo, o que acontece se as diferenças primeiras não forem constantes?

A resposta é a construção das diferenças sucessivas, segunda, terceira, quarta, quinta, etc., até obter diferenças que resultem constantes ou muito pequenas. Este procedimento matemático é suficiente para interpolar com muita precisão as efemérides normalmente usadas em Astronomia, como aquelas presentes no "*The Astronomical Almanac*" [15]. Na Tabela II, estas diferenças, cada vez menores, estão representadas pelas letras a, b, c, d.

Estas diferenças no contexto da Teoria da Interpolação mostra que um valor de $x = x_1 + \theta\ T$ pode ser determinado a partir da seguinte equação (Fórmula de Bessel):

$$\begin{aligned} y \ &= \ y_1 + \theta \left\{ a_2 + \frac{(\theta - 1)}{2} \times \right. \\ &\times \ \left. \left[b_3 + \frac{(\theta - 2)}{3} \left(c_4 + \frac{(\theta - 3)}{4} d_5 \right) \right] \right\} , \end{aligned}$$

onde y_1 representa o valor y correspondente a $x = x_1$, ou seja, o valor mais próximo do argumento a ser usado, θ a fração associada $(0 < \theta < 1)$ e T a diferença dos argumentos adjacentes tabulados [23, 24].

TABELA II. Esquema das diferenças (a, b, c, d) relativas que são necessárias para resultar valores constantes ou muito pequenos.

x	y	a	b	c	d
x_1	y_1	–	–	–	–
		a_2	–	–	–
x_2	y_2	–	b_3	–	–
		a_3	–	c_4	–
x_3	y_3	–	b_4	–	d_5
		a_4	–	c_5	–
x_4	y_4	–	b_5	–	–
		a_5	–	–	–
x_5	y_5	–	–	–	–

A Eq.(13) representa o caso em que a quarta diferença (d_5) precisa ser usada no processo de Interpolação. No entanto, se esta não for necessária, o termo relacionado $(\theta-3)/4$ é zerado e aplica-se apenas a terceira diferença, c_4, ou seja:

$$y = y_1 + \theta\left\{a_2 + \frac{(\theta-1)}{2}\left[b_3 + \frac{(\theta-2)}{3}c_4\right]\right\}. \tag{15}$$

Se esta também não for necessária, o termo $(\theta-2)/3$ também é desprezado e ficamos apenas com a segunda diferença,

$$y = y_1 + \theta\left\{a_2 + \frac{(\theta-1)}{2}b_3\right\} . \tag{16}$$

que serão aplicadas nos exemplos a seguir, envolvendo parte das atividades observacionais desenvolvidas no Grupo de Pesquisa cadastrado no CNPq, AstroPT (Astronomia com Pequenos Telescópios), e também no MPASTRO.

A: Coordenadas Equatoriais de Júpiter

Uma das atividades de observação envolve o conhecimento das Coordenadas Equatoriais Geocêntricas aparentes de Júpiter, α e δ, para o horário das 20 horas do dia 20 de Março de 2019. No entanto, ao consultar as mesmas na biblioteca do Observatório Astronômico Antares, os estudantes encontram no "The Astronomical Almanac" as coordenadas α e δ apenas para a 0^h do Tempo Terrestre (TT) [25] do referido dia, também chamado de Tempo das Efemérides (ver Tabela III). Como proceder neste caso?

TABELA III. Coordenadas Geocêntricas de Júpiter (α, δ, aparentes) para a 0^h do Tempo Terrestre.

Data (Março)	α $(^{h\ m\ s})$	δ $(^{o\ \prime\ \prime\prime})$
20	+21 33 32.370	−15 09 04.68
21	+21 34 22.064	−15 05 11.31
22	+21 35 11.464	−15 01 18.70

Convertendo as coordenadas α e δ da Tabela III para as respectivas frações de hora e grau e calculando as respectivas diferenças, verificamos que as segundas diferenças (b) já se mostram suficientemente pequenas (ver Tabela IV). Então, aplicando a Equação (15), com $\theta = 0{,}83$ $(= 20\,\mathrm{h}\,/\,24\,\mathrm{h})$, obtemos os respectivos valores interpolados: $\alpha = +21^h\,34^m\,13^s{,}638$ e $\delta = -15^o\,05^{\prime}\,50^{\prime\prime}{,}93$.

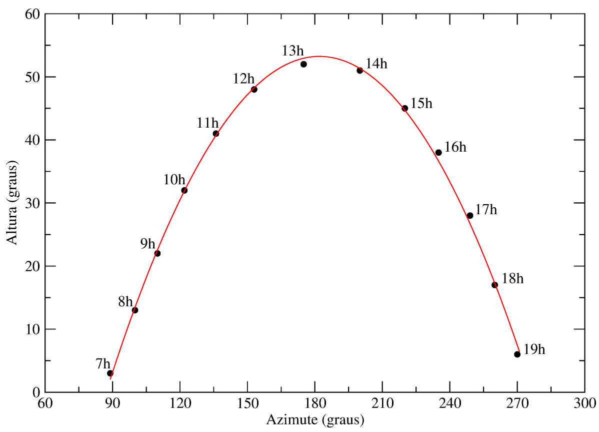

FIGURA 2. Gráfico do movimento diurno aparente do Sol em termos das Coordenadas Horizontais observadas, Azimute (A) e Altura (h).

B: Coordenadas Horizontais do Sol

Em uma outra atividade, os estudantes realizaram observações do Sol em uma deter-

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i-8292

minada data e registraram os dados [Coordenadas Horizontais, altura (h) e Azimute (A)], de forma ordenada como aquela mostrada na Tabela V. Então, de acordo com os dados obtidos, a altura máxima do Sol foi $h = 52°$ e ocorreu exatamente às 13 : 00 horas. No entanto, ao realizar o gráfico (Figura 2), perceberam que a altura máxima não ocorreu às 13 : 00 horas, como indicado na Tabela V, mas um pouco depois, às 13 horas e 19 minutos ($\theta = 0,79$). Então, qual deve ser a correta altura observada para o Sol?

TABELA IV. Diferenças segundas para as Coordenadas Equatoriais Geocêntricas de Júpiter.

Data (Março)	α ($^{h\ m\ s}$)	a	b	δ ($^{\circ}\ '\ ''$)	a	b
20	$21,558992$			$-15,151300$		
		$+0,013804$			$+0,064825$	
21	$21,572796$		$-0,000082$	$-15,086475$		$-0,000211$
		$+0,013722$			$+0,064614$	
22	$21,586518$			$-15,021861$		

Trata-se de um excelente exemplo onde os dados presentes em tabelas não revelam, em alguns casos, o verdadeiro fenômeno observado. Neste caso, o estudante realizou as medidas apenas nas horas inteiras, ao passo que a altura máxima aconteceu na fração não observada.

Realizando o mesmo procedimento (ver Tabela VI) feito no exemplo A, foi verificado que as diferenças voltam a crescer a partir das quintas diferenças (e). Logo, devemos tomar as diferenças presentes em (d) e aplicar a Eq.(13), o que fornece o valor interpolado $h = 52,48°$. O procedimento é o mesmo para a determinar o azimute correspondente e deixaremos isso para o leitor.

C: Ângulo Horário da região H II (ionizada) M8

A Figura 3 ilustra uma imagem da região de formação estelar Messier 8, M8, também conhecida por Nebulosa da Lagoa, na constelação do Sagitário, obtida em 2019 com o telescópio CDK20, CCD Aluma 694 e o filtro I. Uma discussão fotométrica sobre este objeto será apresentada em um outra contribuição.

No caso do Sistema de Coordenadas Horizontais (h, Altura e A, Azimute) tratado no exemplo B, observa-se que as duas coordenadas variam de instante para instante, conforme visto na Tabela V. Portanto, fixo à Terra.

TABELA V. Movimento Aparente Diurno do Sol. Coordenadas Horizontais, Altura (h) e Azimute (A), relativas ao horário local de observação.

Hora Local (horas)	Altura (graus)	Azimute (graus)
07 : 00	03	089
08 : 00	13	100
09 : 00	22	110
10 : 00	32	122
11 : 00	41	136
12 : 00	48	153
13 : 00	52	175
14 : 00	51	200
15 : 00	45	220
16 : 00	38	235
17 : 00	28	249
18 : 00	17	260
19 : 00	06	270

Mas, no Sistema Equatorial, fixo à Esfera Celeste, as duas coordenadas de uma estrela, α e δ, não "variam" com o tempo, salvo pelos efeitos relativos ao movimento próprio e as variações nos planos fundamentais de referência, por exemplo.

TABELA VI. Diferenças relativas à altura do Sol.

Tempo (hora)	h (graus)	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
13 : 00	52						
		−1					
14 : 00	51		−5				
		−6		+4			
15 : 00	45		−1		−6		
		−7		−2		+10	
16 : 00	38		−3		+4		−15
		−10		+2		−5	
17 : 00	28		−1		−1		
		−11		+1			
18 : 00	17		0				
		−11					
19 : 00	06						

O Sistema Equatorial Horário de Referência, apesar de ser fixo à Terra, apresenta uma coordenada H, Ângulo Horário, que varia no tempo, ao passo que a outra, Declinação, permanece praticamente fixa. O problema consiste em encontrar H relativo à M8 para o horário de 22^h 18^m 14^s,8 do dia 13 de Julho de 2022.

Considere a Tabela VII. Seguindo o mesmo procedimento anterior e usando a Eq.(15), visto que as diferenças segundas (b) já se revelam bem pequenas no cálculo, o que permite encontrar o valor interpolado de $H = +00^\circ\ 27'\ 13'', 24$.

III.1. D: Ângulo Horário da estrela variável HD 94033

A estrela HD 94033 (SAO 179271), uma variável sub-anã de tipo spectral $A7$ com magnitude aparente $9,96$ (V) e período de $0,0595$ dias (variabilidade, [24]), foi observada na noite de 13 de Março de 2022 com o telescópio Meade LX200 GPS ($24,5$ cm), CCD SBIG ST-7 XME-D (765×510 pixels) e filtro I, como parte do programa fotométrico de observação de estrelas variáveis (Figura 4). Trata-se de uma Cefeida com período de pulsação muito curto e que também será discutida em uma outra contribuição científica. No entanto, ao contrário do CDK20, os telescópios Meade LX200 GPS empregam o Sistema Horizontal Local de Referência, h e A.

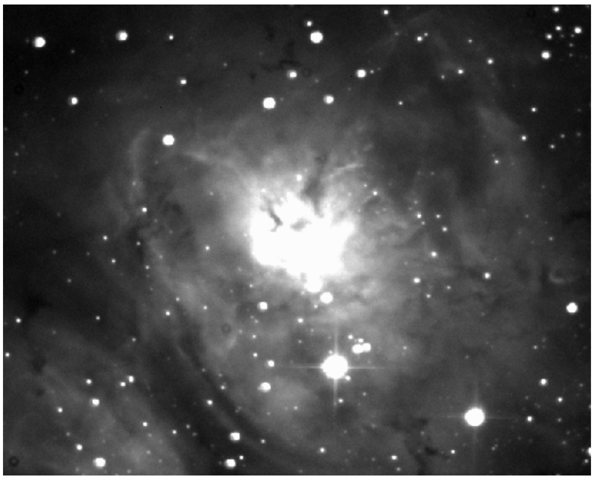

FIGURA 3. Nebulosa da Lagoa, Messier 8, uma gigantesca nuvem interestelar na constelação de Sagitário, classificada como uma nebulosa de emissão. Imagem no filtro I obtida com o telescópio CDK20 (50,8 cm) e o CCD SBIG Aluma 694 (2750×2200 pixels) no Observatório Astonômicco Antares/Museu Antares de Ciência e Tecnologia−UEFS.

Como determinar, usando a Tabela VIII, as novas coordenadas para o dia 17 de Julho às 23^h 18^m $15^s, 45$?

TABELA VII. Coordenadas Equatoriais Horárias (H, δ, aparentes) para a Nebulosa da Lagoa, M8.

Data (Julho)	H ($^{h\ m\ s}$)	δ ($^{\circ\ \prime\ \prime\prime}$)
13	$+00\ 21\ 43,10$	$-24\ 22\ 25,0$
14	$+00\ 27\ 35,91$	$-24\ 22\ 25,1$
15	$+00\ 32\ 26,54$	$-24\ 22\ 25,2$

De forma análoga, encontramos as novas coordenadas interpoladas $h = +67^\circ\ 06'\ 46'', 58$ e

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i-8292

$A = +222° \; 06' \; 18'', 03$, uma vez que as diferenças segundas (b) em ambas coordenadas se mostraram pequenas.

TABELA VIII. Coordenadas Horizontais (h, A, aparentes) para a estrela HD 94033.

Data (Julho)	h (° ′ ″)	A (° ′ ″)
17	$+67\;43\;43,81$	$+220\;37\;20,6$
18	$+67\;05\;36,94$	$+222\;08\;58,1$
19	$+66\;26\;18,77$	$+223\;35\;02,1$

IV. Extrapolação Numérica

Existe um processo similar ao conceito visto anteriormente, conhecido como Extrapolação, cujo propósito consiste em requerer o valor da função para um argumento que não se encontra na Tabela de investigação. Em outras palavras, trata-se de um procedimento que cria novos pontos que se encontram fora dos limites dos pontos conhecidos, ou seja, fora do intervalo de observação original. Porém, diferente do anterior, os resultados obtidos são, frequentemente, sujeitos a incerteza.

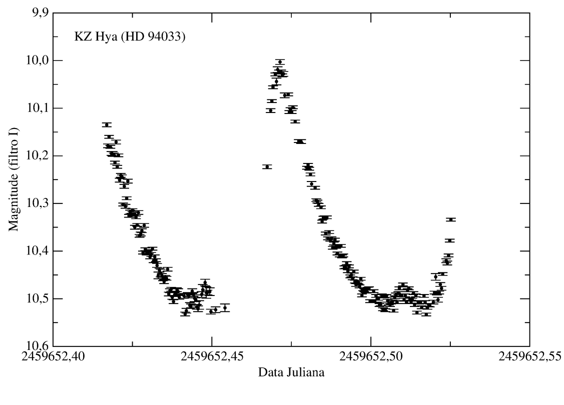

FIGURA 4. Uma das curva de luz no filtro I para a variável Cefeida de período muito curto HD 94033, obtida com o Meade LX200 GPS (24, 5 cm), CCD SBIG ST-7 XME-D e filtro I.

Vamos ilustrar este conceito recuperando a Tabela I, onde a função de partida foi do tipo $y = 2x$, de modo que a função varie proporcionalmente ao argumento. Neste caso, a teoria diz que as Equações para a extrapolação linear associada aos valores menores que x_1 será do tipo (considerando os argumentos presentes na Tabela I),

$$y = y_i - a_{i+1} \; \frac{x_i - x}{x_{i+1} - x_i} \; , \tag{17}$$

enquanto para os valores maiores que x_6 será:

$$y = y_i + a_i \; \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} \; . \tag{18}$$

Por exemplo, se quisermos saber o valor da função para $x = -3$, fora dos argumentos presentes na Tabela I, teremos, simplesmente: $y = 2 \times (-3) = -6$. Pela Eq.(16):

$$\begin{aligned} y \;&=\; y_1 - a_2 \; \frac{x_1 - x}{x_2 - x_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow y \;&=\; 0 - 6 \left[\frac{(0 - (-3))}{(3 - 0)} \right] = -6. \end{aligned}$$

Para o valor do argumento $x_7 = 18$, teremos $y = 2 \times (18) = 36$. Pela Eq.(17):

$$\begin{aligned} y \;&=\; y_6 + a_6 \; \frac{x_7 - x_6}{x_6 - x_5} \Rightarrow \\ \Rightarrow y \;&=\; 30 + 6 \left[\frac{(18 - 15)}{(15 - 12)} \right] = 36. \end{aligned}$$

V. Discussões Gerais

Os vários aplicativos computacionais voltados para a Astronomia e que ora usamos ao longo dos Componentes Curriculares, representam importantes laboratórios virtuais didáticos que permitem materializar diversos conceitos astronômicos abstratos.

Os *scripts* propostos permitem criar os mais variados objetos astronômicos e atribuir aos mesmos uma cinemática para movê-los em novas posições a luz de seculares leis físicas calcadas em robustos fundamentos matemáticos. Neste aspecto, salientamos a Interpolação como uma das ferramentas matemáticas presente em vários dos aplicativos computacionais, a exemplo do "*Stellarium Telescope Control Plug-in*

- *InterpolatedPosition.hpp* [26]", desenvolvidos por Johannes Gajdosik (2006) e Bogdan Marinov (2009-2010).

As técnicas observacionais clássicas empregadas na Astronomia, como a Espectroscopia, a Fotometria e a Polarimetria, produzem dados onde os procedimentos posteriores de tratamento (redução) envolvem variadas técnicas matemáticas. Por exemplo, de acordo com [12], os resultados das análises realizadas sobre o custo computacional e experimentos de transformação realizados em imagens CCD, revelam que, em geral, a Interpolação B-spline cúbica fornece a melhor relação custo-desempenho, sendo, portanto, aplicada na maioria dos casos.

As posições dos astros em função do tempo nos Sistemas de Coordenadas encontram-se tabelados na forma de Efemérides, em geral, agrupados de dez em dez dias. A fração do dia vem registrado com apenas um decimal, por exemplo, $15,5$ de TU (Tempo Universal), o que significa dia 15 em Greenwich às 12 horas médias. Logo, as coordenadas para a época da observação desejada devem ser obtidas pelo método de Interpolação, como visto nos exemplo anteriores. Os Calendários e os Sistemas de Medidas de Tempo representam outras fontes de uso deste método. Por exemplo, muitos problemas envolvem a determinação da Equação do Tempo para uma data e hora específicas. O cálculo da precessão anual também representa uma outra situação em que o método de Interpolação pode ser usado. Todos estes aspectos fazem parte da processo de formação dada no MPASTRO, de modo a ratificar a necessidade de destacar este conhecimento matemático.

No caso da BNCC, as Progressões Aritméticas e Geométricas fazem parte do campo "Números e Álgebra", contemplando as Habilidades descritas no Item II, de modo que a (re)elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas nas Escolas podem adotar outras organizações e incluir aspectos simples da Interpolação, tendo como sustentação não apenas às habilidades definidas na BNCC, mas também o diferencial que pode ser levado aos estudantes e que contemplem especificidades e demandas próprias dos professores que se encontram em processos de formação contínuada em nível de pós-graduação. A despeito disso, é fundamental preservar a articulação, proposta na BNCC, entre os vários campos da Matemática e as outras áreas do conhecimento, possibilitando, dessa forma, a construção de uma visão integrada e aplicada à realidade.

No que concerne ao uso das Tecnologias associadas, como calculadoras, para avaliar e comparar resultados e planilhas eletrônicas, que ajudam na construção de gráficos e nos cálculos de estatística, a Interpolação pode ser explorada de forma simples empregando um simples computador. A Planilha Excel da Microsoft® na função "*previsão.linear*" fornece tal recurso. Contudo, este ponto conflita com a realidade de uma parcela significativa de Escolas que não contam com laboratórios didáticos e de informática, ou de computadores nos lares dos(as) estudantes. No entanto, o MPASTRO entende que é possível transformar tal realidade e a nossa contribuição está na oferta de uma formação pós-graduada de qualidade para os professores(as) da Educação Básica.

Além dos exemplos descritos acima, uma outra discussão envolve à aproximação de funções complicadas por funções mais simples. Suponha que tenhamos uma função que seja complicada demais para que seja possível avaliá-la de forma eficiente. Podemos, então, escolher alguns dados pontuais da função complicada e tentar interpolá-los com uma função mais simples. Obviamente, quando utilizamos uma função mais simplificada para calcular novos valores, normalmente não se obtém o mesmo resultado da função original, mas dependendo do domínio do problema e do método de interpolação utilizado, o ganho de simplicidade pode compensar o erro.

VI. Conclusões

O método de Interpolação representa uma poderosa ferramenta com muitas aplicações no campo da Astronomia, de modo que julgamos importante trabalhar tal aspecto com os nossos pós-graduandos. Em tempo, salientamos que toda a discussão necessária referente aos méto-

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i-8292

dos estatísticos para o tratamento dos dados serão apresentados em uma outra contribuição científica.

Finalmente, os docentes do MPASTRO entendem que a valorização do Ensino de Matemática e de Ciêncais nas Escolas passa, também, pelas ações dos professores(as) na sala de aula, o que acaba implicando diretamente em nossa parcial contribuição. Entretanto, o cenário ainda é distante do ideal. Os resultados do IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) mostram que, na escala de 0 a 10, ainda não atingimos o valor médio nas várias áreas do conhecimento, sobretudo na Matemática. Trata-se, portanto, de um grande desafio que temos pela frente.

Agradecimentos

Esta contribuição representa uma das várias demandas apresentadas pelos estudantes do MPASTRO e foi realizada a partir da infraestrutra disponível no Departamento de Física/UEFS e no Observatório Astronômico Antares (OAA/UEFS).

---

[1] http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

[2] Brasil. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC 2018. Acesso em: 18 Março de 2022.

[3] A. Azevedo, *Interpolação: Série Cálculo Numérico para Todos.* eBook Kindle. Campinas: Anibal Azevedo (2021).

[4] V.A. Baturin, W. Däppen, A.V. Oreshina, S.V. Ayukov, A.B. Gorshkov, *Interpolation of equation-of-state data.* Astronomy & Astrophysics **626**, A108 (2019).

[5] N.B. Franco, *Cálculo Numérico.* São Paulo: Prentice Hall (2006).

[6] M. Lombardi, *Interpolation and smoothing.* Astronomy & Astrophysics **395**, 733 (2002).

[7] N.S. Bakhvalov, *Numerical methods: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations.* Moscow: MIR (1977).

[8] I.S. Berezin, N.P. Zhidkov, *Computing methods.* Vol. 1. Oxford: Pergamon Press (1973).

[9] R.M. Barbosa, *Cálculo Numérico Interpolação Polinomial.* Vol. 4. São Paulo: Ed. Nobel (1972).

[10] F.B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis.* Boston: Addison-Wesley (1956).

[11] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* 9th printing. New York: Dover (1972).

[12] E. Meijering, *A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing.* Proceedings of the IEEE **90**, 3 (2002).

[13] https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-oct/main.html

[14] W.H. Beyer, *CRC Standard Mathematical Tables.* 28th Edition. Boca Raton: CRC Press (1987).

[15] *The Astronomical Almanac For the Year 2022.* Data for Astronomy, Space Sciences, Geodesy, Surveying, Navigation and other Applications. United Kingdom: Her Majesty's Nautical Almanac Office, United Kingdom Hydrographic Office, Admirally Way, Taunton, Somerset, TA1 2DN (2022).

[16] http://asa.hmnao.com/

[17] https://www.iau.org/

[18] J. Piaget. *Os Pensadores – Piaget.* Fascículo 2. (Edição esgotada). São Paulo: Abril Cultural (1978).

[19] D. Ausubel, J. Novak, H. Hanesian, *Psicologia Educacional.* Fascículo 2. (Edição esgotada). São Paulo: Interamericana (1980).

[20] C.B. Boyer, U.C. Merzbach, *História da Matemática.* 3^a Edição. São Paulo: Editora Blücher (2012).

[21] M. Chaquiam, *Ensaios Temáticos – História e Matemática em Sala de Aula.* 1^a Edição. Belém: SBEM/SBEM-PA (2017).

[22] A Média Geométrica entre os números x, y, z vale $y^2 = x \times z$, com o produto $x \times z > 0$.

[23] B.A. Vorontsov-Veliaminov, *Problemas y Ejercicios Prácticos de Astronomia.* (Segunda reimpresión). Moscu: Editora Mir (1988).

[24] E. Rodriguez, M.J. Lopez-Gonzalez, P. Lopez de Coca, *A revised catalogue of δ Sct stars.* A&AS **114**, 469 (2000).

[25] Uma forma idealizada de Tempo Atômico Internacional (TAI) com um ajuste de época. Na prática, $TT = TAI + 32^s184$, com TAI baseado no segundo do Sistema Internacional (SI). 1 segundo do SI representa o tempo decorrido para que ocorram 9.192.631.770 ci-

clos de transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de Céssio 133.

[26] https://stellarium.org/doc/0.16/Interpolated Position_8hpp_source.html

DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i-8292