

Deslocamento perpendicular à direção do movimento na teoria da relatividade especial

Perpendicular displacement to the direction of motion in special relativity theory

Davi Antonio Assunção[✉] e Samuel Bueno Soltau^{✉*}

Departamento de Física – ICEX – Unifal-MG

Av. Jovino Fernandes Salles, 2600, Santa Clara, Alfenas – MG – 37133-840

(SUBMETIDO: [20/04/2023] – ACEITO: [03/08/2023] – PUBLICADO: [20/09/2023])

Os problemas de Relatividade Especial envolvendo a transformação de Lorentz propostos em manuais de Física alinham o movimento dos projéteis e dos observadores que o descrevem numa única coordenada, ou seja, na mesma direção e sentido. Contudo, estudar a situação na qual o movimento de um projétil é perpendicular à direção dos referenciais dos observadores permite graduar a dificuldade na análise até enfrentar a situação de movimentos em qualquer direção. Neste contexto, apresentamos aqui um caso simples, bidimensional ao estudarmos a quantidade de movimento de um projétil lançado perpendicularmente contra um alvo conforme descrito na perspectiva de observadores em dois referenciais distintos com a intenção de desenvolver a intuição física a respeito de fenômenos relativísticos e aprimorar a habilidade no uso das equações e conceitos Relatividade Especial.

Palavras-chaves: Relatividade Especial; Transformação de Lorentz; Referenciais.

The problems on Special Relativity involving the Lorentz transformation as proposed in Physics textbooks align the projectiles motion and the observers describing them in a single coordinate in the same direction. However, studying the situation in which the motion of a projectile is perpendicular to the direction of the observers' reference frames allows to graduate the difficulty in the analysis until facing the situation of motion in any direction. In this context, we present here a simple, two-dimensional case of studying the momentum of a projectile launched perpendicularly against a target as described from the perspective of observers in two different reference frames with the intention of developing physical intuition about relativistic phenomena and improving the ability to use Special Relativity equations and concepts.

Keywords: Special Relativity; Lorentz Transformation; Reference Frames.

I. Introdução

Na maioria dos manuais de Física que abordam a Teoria da Relatividade Especial [1; 2; 3] o movimento de um objeto estudado está alinhado paralelamente ao eixo x que, via de regra, é o mesmo da direção do deslocamento dos referenciais envolvidos. Esta é uma escolha conveniente, pois em tal situação as coordenadas que restam, i. e., y e z são invariantes sob as transformações de Lorentz uma vez que $y = y'$ e $z = z'$. Contudo, é interessante estudar o caso em que o movimento do objeto não coincide com a mesma coordenada do movimento dos referenciais.

Apresentamos aqui uma situação na qual ocorre o movimento espacial bidimensional de uma massa no eixo perpendicular ao deslocamento dos referen-

ciais. O propósito é estudar um caso simples, bidimensional, antes de abordar situações mais complexas nas quais as linhas de mundo de observadores e do fenômeno descrito por eles seguem direções arbitrárias, como é discutido e.g. [4], [5] ou [6]. Com este estudo esperamos contribuir para desenvolver e aprimorar a intuição física a respeito de fenômenos relativísticos e a habilidade no uso das equações e conceitos da Relatividade Especial.

A Relatividade Especial afirma que a massa de um objeto e, por extensão, a sua quantidade de movimento (*momentum*), depende dos referenciais inerciais nos quais são medidas [1]. Propomos examinar a relação entre as quantidades de movimento de um projétil lançado contra um alvo fixo em relação ao seu referencial próprio por meio da solução analítica deste problema balístico como percebido na perspectiva de dois observadores situados em referenciais distintos e ambos perpendiculares ao dis-

* E-mail: samuel.soltau@unifal-mg.edu.br

paro do projétil.

O artigo está organizado como segue. Na Seção II, apresentamos os conceitos e ideias da Teoria da Relatividade Especial necessárias para abordar o presente estudo. Na Seção III, o problema em estudo é descrito e analisado sob a perspectiva dos conceitos apresentados na seção anterior e, na seção IV, expomos a solução analítica do problema estudado. Por fim, na Seção V, apresentamos as considerações finais e apontamos alguns desdobramentos e possibilidades de explorar problemas similares porém mais complexos.

II. Alguns conceitos da Teoria da Relatividade Especial

A Teoria da Relatividade Especial possui dois postulados centrais como pressupostos que dão consistência aos conceitos e formulações da teoria. No primeiro, temos que as leis da Física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais ou seja, todos os sistemas referenciais são equivalentes, não há referenciais privilegiados. O outro postulado, relacionado à causalidade dos eventos, é o princípio da constância da velocidade da luz que estabelece a velocidade da luz no vácuo como um limite universal intransponível sendo a mesma para todos os observadores em referenciais inerciais, independentemente da velocidade relativa entre eles. Isso significa que os efeitos da Relatividade Especial começam a se tornar relevantes quando os objetos se movem em velocidades comparáveis à da luz [1].

Contudo, para que a velocidade da luz seja constante em qualquer sistema de referência inercial, o tempo e o espaço não podem ser tomados como grandezas absolutas. Como consequência disso, as velocidades altas comparadas com a da luz no vácuo apresentam medidas variáveis conforme o referencial. Uma vez que não há referenciais absolutos cada referencial tem seus valores observáveis próprios, e.g., tempo próprio, comprimento próprio, velocidade própria etc., relativos à cada observador em seu referencial próprio [3].

Para estabelecer conexões entre as coordenadas de tempo e espaço, i.e., espaço-tempo, em diferentes referenciais utilizamos as *Transformações de Lorentz*, [2] dadas pelas equações em (4):

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (1)$$

$$y' = y, \quad (2)$$

$$z' = z, \quad (3)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad (4)$$

e, a *inversa da Transformação de Lorentz* dadas pelas equações em (5),

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

onde x, y, z são as coordenadas espaciais e t , o tempo no referencial inercial de observador, via de regra vinculado ao *referencial do laboratório* e, x', y', z', t' são as coordenadas espaço-temporal em um outro referencial de observador em movimento relativo em relação ao primeiro, em geral denominado *referencial da partícula*. O *fator de Lorentz*, designado por γ , é dado pela Eq.(6) definida como,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{onde, } \beta = \frac{v}{c}, \quad (6)$$

onde v é a velocidade relativa entre os dois referenciais e c é a velocidade da luz no vácuo (299 792 458 m/s, [7]).

A seguir apresentamos mais alguns conceitos da Relatividade Especial relevantes para analisar e discutir o problema abordado neste estudo.

A. Contração de Lorentz

A *contração de Lorentz* descreve como a dimensão de um objeto muda quando ele se move com velocidades próximas à da luz no vácuo em relação a um observador e é descrita pela Eq.(7):

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7)$$

onde L' é a dimensão de um objeto em movimento como medida por um observador num referencial distinto do referencial do objeto, v é a velocidade do objeto em relação ao observador, L é a dimensão do objeto quando está em repouso no seu referencial próprio e c é a velocidade da luz no vácuo [3].

A contração de Lorentz é uma consequência direta do primeiro postulado da Teoria da Relatividade Especial. A Eq.(7) mostra que a dimensão de um objeto aparenta ser menor quando ele se move a velocidades próximas à da luz em relação a um observador, o que é conhecido na literatura como efeito de *contração na direção do movimento* [2].

126 **B. Velocidades relativísticas**

127 A velocidade de um móvel é um observável men-
 128 surável na perspectiva de dois referenciais distintos.
 129 Um primeiro referencial que se move ao longo de
 130 uma única coordenada com velocidade constante v
 131 em relação a um segundo referencial que observa o
 132 movimento do primeiro. Cada observador em seu
 133 respectivo referencial mede a velocidade do móvel.
 134 No primeiro referencial as componentes da veloci-
 135 dade são u'_x , u'_y e u'_z . No segundo referencial as
 136 componentes da velocidade são u_x , u_y e u_z . Com
 137 estas definições e a partir das transformações de co-
 138 ordenadas de Lorentz, as equações (4), encontra-
 139 mos as seguintes transformações de velocidade de
 140 Lorentz como medidas no primeiro referencial:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}},$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, \tag{8}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}. \tag{9}$$

141 A velocidade v é positiva se o segundo referencial
 142 se mover na direção $+x$ e negativa se, ao contrário,
 143 se mover na direção $-x$. Como nas equações (5), se
 144 as equações (8) são invertidas, obtemos:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}},$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 - \frac{u'_x v}{c^2}\right)}, \tag{10}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 - \frac{u'_x v}{c^2}\right)}. \tag{11}$$

145 Ressaltamos que as componentes da velocidade
 146 nas coordenadas y , z e y' , z' como medidas em seus
 147 respectivos referenciais não envolvem o valor de v
 148 ou $-v$ no numerador das equações (8) e (10), pois
 149 o movimento relativo ocorre somente ao longo da
 150 coordenada x . Sendo assim, precisamos descontar
 151 a contribuição da velocidade $\pm v$. Vale notar que
 152 devido a simetria presente no postulado da Relati-
 153 vidade Especial que estabelece que as leis da Física
 154 são invariantes para todos os referenciais inerciais,
 155 ambos os referenciais são completamente equivalen-
 156 tes.

157 **C. Massa relativística**

158 Assim como o comprimento e as velocidades, a
 159 massa de um objeto também está submetida aos
 160 efeitos relativísticos. Quando um objeto se move
 161 com velocidades próximas a da velocidade da luz
 162 no vácuo a sua massa mensurada aumenta e, conse-
 163 quentemente, sua energia também aumenta. Assim,
 164 quanto mais a velocidade de um objeto se aproxima
 165 da velocidade luz, mais energia será necessário for-
 166 necer para acelerar o objeto.

167 A Eq.(12) fornece a massa m de um objeto como
 168 medida em um referencial inercial que se move com
 169 velocidade próxima à da luz no vácuo em relação ao
 170 referencial próprio do objeto,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{12}$$

171 onde m_0 é a massa inercial do objeto medida por-
 172 tanto, quando o objeto está em repouso em seu refe-
 173 rencial próprio, v é a velocidade do objeto em rela-
 174 ção ao observador e c , como esperado, é a velocidade
 175 da luz no vácuo [3].

176 **III. O problema em estudo**

O presente estudo examina o problema represen-
 tado na Figura (1) e descrito a seguir.

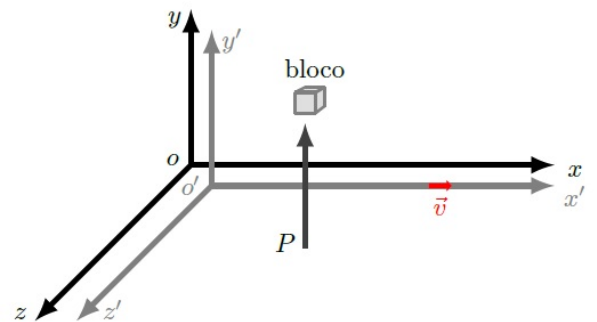


Figura 1 – Diagrama representando o problema descrito.

Sejam dois referenciais inerciais distintos. Um referencial, denotado por O , com coordenadas x , y , z e t e outro referencial, denotado por O' , com coordenadas x' , y' , z' , t' e que se move ao longo das coordenadas paralelas $x \parallel x'$ com velocidade constante v em relação a outro referencial O .

A partir do referencial O' é disparado um projétil de massa própria, m , na direção da coordenada y' até atingir um bloco fixo em relação ao referencial O' . Do ponto de vista de um observador em repouso neste mesmo referencial O' , o projétil irá se mover em linha reta com uma velocidade constante u'_y .

É razoável supor que a profundidade que o projétil penetrará no bloco é determinada pela componente y' da quantidade de movimento (*momentum*), dado por

$$p'_y = m' u'_y, \tag{13}$$

onde m' é a massa própria do projétil como medida no referencial O' .

Porém, consideremos o mesmo evento a partir do ponto de vista de um observador situado no referencial O que mede o referencial O' se movendo na direção $x \parallel x'$ com velocidade v_x . Como a profundidade alcançada pelo projétil é perpendicular com a direção do movimento relativo, os observadores situados em ambos os referenciais concordariam quanto à medida da profundidade da penetração do projétil no bloco e, portanto, esperariam encontrar o mesmo valor para a quantidade de movimento do projétil calculado a partir de seus respectivos referenciais. Entretanto, no referencial O , a quantidade de movimento é,

$$p_y = m u_y, \tag{14}$$

onde m é a massa do projétil e u_y é a velocidade do projétil como medida no referencial O .

A partir das equações (8) e (10) e dado que $u'_x = 0$ temos que,

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u'_x v^2}{c^2}} = u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{15}$$

e, substituindo (15) em (14), podemos escrever que

$$p_y = m u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{16}$$

Vale ressaltar que ambos os observadores atribuem a mesma massa inercial, $m' = m$, ao projétil disparado por conta da profundidade que penetrou no bloco. Da concordância em relação à massa, surge uma diferença entre a quantidade de movimento, $p'_y \neq p_y$, do projétil medida em cada referencial em contradição com o esperado. Nesta inconsistência é que reside o problema.

IV. Solução

Os conceitos e equações da Teoria da Relatividade Especial descritas na Seção II aplicadas ao problema apresentado na Seção III soluciona a aparente contradição (veja o Apêndice (A) para detalhes dos cálculos e análise.). Para aplicá-las, uma análise da Fig.(1) basta para notarmos que o movimento de O' – e portanto do projétil e do bloco – na direção da velocidade v como observado no referencial O , embora estejam submetidos à contração de Lorentz, esta condição não tem relevância para a solução do problema uma vez que o projétil é disparado e penetra no bloco na direção da coordenada $y \parallel y'$. Embora o bloco e o canal perfurado nele pelo projétil sofram contração de Lorentz na direção do movimento, é o comprimento da perfuração longitudinal que é relevante para solucionar o problema e não sua dimensão em $x \parallel x'$.

Como há concordância entre os observadores em seus respectivos referenciais em relação à massa do projétil, recorremos, então, a Eq.(12) conforme aplicada para o observador no referencial O' , que está em repouso em relação ao disparo do projétil e, portanto, $u'_x = 0$. Assim,

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_y}{c^2}}}. \tag{17}$$

Entretanto, para o observador no referencial O , o projétil está em movimento com velocidade $u_x = v$. Logo, ao aplicarmos a Eq.(12) temos

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2 + u^2_y}{c^2}}}. \tag{18}$$

Partindo de que $m' = m$ nota-se que, exceto pelos termos dos radicandos, as equações (17) e (18) são iguais. Por isso extraímos o radicando da Eq.(18), aplicamos a Eq.(15) e encontramos:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \left(u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{u'^2_y}{c^2} \right). \tag{19}$$

Vale ressaltar que o referencial O' é o único em relação ao qual se pode medir a massa inercial do projétil. Logo, poderemos assumir que $m_0 = m'$ para simplificar (19) e obter:

$$m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{20}$$

259 para finalmente mostrar que $p_y = p'_y$.
 260 Assim, a componente y' da quantidade de movi-
 261 mento do projétil medida por O' e por O é a mesma,
 262 solucionando a dificuldade da suposta inconsistên-
 263 cia na situação descrita.

264 **V. Conclusões**

265 O exame analítico do problema do movimento
 266 do projétil na perspectiva de observadores em refe-
 267 renciais inerciais distintos e perpendiculares à linha
 268 de mundo do projétil mostrou-se adequada como
 269 uma primeira aproximação para o estudo de pro-
 270 blemas mais desafiadores envolvendo, por exemplo,
 271 linhas de mundo em referenciais que seguem dire-
 272 ções arbitrárias.

273 A matemática empregada nos cálculos prescin-
 274 diu de um tratamento mais sofisticado sem entre-
 275 tanto abrir mão do rigor e estando ao alcance de
 276 estudantes principiantes em Física que desejam ini-
 277 ciar os estudos da Teoria da Relatividade Especial
 278 e avançar gradualmente para tópicos mais elabora-
 279 dos.

280 Em estudos futuros, pretendemos analisar pro-
 281 blemas cuja abordagem exijam a utilização de ten-
 282 sores e assim prosseguir na investigação teórica
 283 dos fenômenos que surgem quando se adotam di-
 284 reções arbitrárias no movimento quadridimensional
 285 no espaço-tempo, em especial em relação à variação
 286 da massa.

287 **Agradecimentos**

288 Os autores agradecem à Coordenação de Aper-
 289 feiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)
 290 pelo apoio financeiro para a realização desta pes-
 291 quisa.

292 **A. Cálculos em detalhe**

293 Apresentamos em detalhe neste Apêndice A os
 294 cálculos efetuados para o presente estudo acompa-
 295 nhados da argumentação física quando conveniente.

296 As componentes da velocidade u no referencial
 297 O são $u = u_x + u_y$ e as componentes da velocidade
 298 u' nos referencial O' são $u' = u'_x + u'_y$.

299 Como a direção do movimento estudado se dá
 300 somente na direção da coordenada x e do ponto de
 301 vista do referencial O' não há movimento, então po-
 302 demos assumir, sem perda de generalidade, que:

$$u'_x = 0. \tag{A1}$$

303 Como para o observador no referencial O o referen-
 304 cial O' se afasta dele na direção x com velocidade v
 305 podemos escrever o vínculo:

$$u_x = v. \tag{A2}$$

306 Partindo das condições expressas nas euqações
 307 (A1) e (A2), a componente u_y , do referencial O for-
 308 nece, portanto, a seguinte expressão:

$$u_y = \frac{u'_y + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{A3}$$

Dada a Eq.(A3), podemos estudar o evento do
 disparo do projétil na perspectiva de ambos os re-
 ferenciais. A aparente contradição entre a perspec-
 tiva dos observadores em seus respectivos referenci-
 ais pode ser equacionada como segue:

- Para o observador no referencial O' , a quanti-
 dade de movimento do projétil para penetrar
 o bloco é $p'_y = m' \cdot u'_y$.
- Para o observador no referencial O , temos
 que a quantidade de movimento do projétil é
 $p_y = m \cdot u_y$.

320 Temos então que $m = m'$, mas $p'_y \neq p_y$ em
 321 uma aparentemente violação do postulado da Re-
 322 latividade Especial que prescreve que todos os refe-
 renciais inerciais são equivalentes ou, dito de outra
 forma, as leis da Física são as mesmas em todos os
 sistemas de referência inerciais.

326 Usando a Eq.(A3), podemos reescrever a quan-
 327 tidade de movimento observada em O como,

$$p_y = m u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{A4}$$

328 Partindo do consenso entre os observadores de
 329 que há igualdade entre as massas inerciais observa-
 330 das, $m = m'$, podemos escrever uma expressão para
 331 a massa na perspectiva de cada referencial.

Referencial O' :: Usando a Eq.(A1), temos:

$$m' = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_x'^2 + u_y'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_y'^2}{c^2}}}. \tag{A5}$$

Referencial O' :: Usando a Eq.(A2), temos:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2 + u_y^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2 + u_y^2}{c^2}}}. \quad (A6)$$

Por inspeção, notamos que as equações (A5) e (A6) são similares a menos os termos nos radicandos. Portanto trabalharemos somente com estes termos. Deste modo,

$$1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u_y^2}{c^2} = 1 - \frac{u_y'^2}{c^2} \\ = 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \left(u_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 \\ = 1 - \frac{u_y'^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{u_y'^2}{c^2} \right). \quad (A7)$$

Retornamos a expressão encontrada em (A7) para o radicando das equações (A5) e (A6) em uma única equação em (A8) e usamos ainda o fato de que o único referencial no qual a massa inercial do projétil, m_0 , pode ser medida é o referencial O' e, portanto, podemos assumir que $m_0 = m'$.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{u_y'^2}{c^2} \right)}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_y'^2}{c^2}}} = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (A8)$$

Finalmente, retomando a Eq.(A4), substituímos

333 a massa encontrada na Eq.(A8),

$$p_y = m u_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} u_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m' u_y' = p_y'. \quad (A9)$$

o que permite concluir que há coincidência entre as quantidades de movimento medidas em ambos os referenciais e a inconsistência inicial é apenas aparente.

Referências

[1] L. Sartori, *Understanding relativity: a simplified approach to Einstein's theories*. Berkeley: University of California Press (1996).
 [2] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Ótica, Relatividade, Física Quântica*. vol. 4. São Paulo: Edgard Blücher (2014).
 [3] H.D. Young, R.A. Freedman, *Sears e Zemansky Física IV: Ótica e Física Moderna*. São Paulo: Pearson Education do Brasil (2016).
 [4] C. Iyer, G.M. Prabhu, *Lorentz transformations with arbitrary line of motion*. European Journal of Physics **28**, 183 (2007). doi:10.1088/0143-0807/28/2/004.
 [5] P.C.S. Costa, *Transformações de lorentz e seus invariantes*. Monografia (Graduação). Instituto de Física Teórica da Unesp, São Paulo (2011).
 [6] D.-H. Lin, *The 2 + 1-Dimensional Special Relativity*. Symmetry **14**, 11 (2022). doi:10.3390/sym14112403.
 [7] R.L. Workman *et al.*, *Review of Particle Physics*. Particle Data Group. Progress of Theoretical and Experimental Physics **2022**, 083C01 (2022). doi:10.1093/ptep/ptac097.