

Dinâmica de Campos Térmicos Aplicada ao Estudo da Superposição de Estados Coerentes e Estados de Fock via Função de Wigner

Thermofield Dynamics Applied to the Study of the Superposition of Coherent States and Fock States through Wigner Function.

Lourival Manoel da Silva Filho*

*Departamento de Ciências Exatas e da Terra – DCET II – UNEB
Alagoinhas – BA – 40030-010*

A estrutura algébrica da dinâmica de campos térmicos, o formalismo da teoria quântica de campos a temperatura finita e a tempo real, são usados para o estudo do estado composto pela superposição de um estado número de Fock, $|n\rangle$, com um estado coerente, $|\alpha\rangle$. A análise dos efeitos da temperatura é realizada considerando a matriz densidade e a função de Wigner. Para tal propósito, vamos considerar a duplicação do estado original com o estado de vácuo do espaço dual.

Palavras-chaves: TQC; Temperatura Finita; Estado Coerente; Estado de Fock; Função de Wigner.

The algebraic structure of the dynamics of thermal fields, the formalism of quantum field theory at finite temperature and at real-time, are used in the study of the composite state as a superposition of a (number) Fock state, $|n\rangle$, and a coherent state, $|\alpha\rangle$. The analysis of the temperature effects is done taking into account the density matrix and the Wigner function. For such a purpose we will consider the duplication of the original state with the vacuum state of the dual space.

Key-words: QFT; Finite Temperature; Coherent State; Fock State; Wigner Function.

I. INTRODUÇÃO

Os efeitos térmicos em teorias de campos desempenham um papel relevante em diversas situações de interesse experimental e teórico, como em oscilações de íons pesados em física de altas energias e em quebra espontânea de simetria [1–4], ou nas flutuações do estado de vácuo do campo eletromagnético que levam ao efeito de Casimir [5–8], ou ainda em estados coerentes da radiação eletromagnética [9–11]. De forma geral, os métodos teóricos introduzidos no contexto da física térmica procuram explorar as técnicas desenvolvidas para teorias à temperatura nula. Neste sentido, o método de tempo imaginário de Matsubara, para situações de equilíbrio, é um dos mais

celebrados [2]. Uma versão desse formalismo, estruturada na noção de espaço vetorial e a tempo real, foi proposta por Takahashi e Umezawa, conhecida como Dinâmica de Campos Térmicos, DCT, [12–14], e tem sido aplicada para tratar o efeito térmico em diversos fenômenos, em particular, sistemas bosônicos, posto que estes desempenham um papel importante na produção e detecção de condensados de Bose-Einstein, e as técnicas experimentais de *laser cooling*, armadilhas magnéticas e magnético-ópticas se desenvolveram em grande medida [1, 2]. Estes aspectos, por outro lado, têm conduzido ao desenvolvimento experimental de produção de gás de Fermi degenerado, bem como condensados de isótopos raros [2–5, 7]. Esta situação sugere o estudo cuidadoso da noção de estados de Fermi coerentes e dos operadores densidades fermiônicos; alguns desses conceitos foram introduzidos para férmions há algum tempo [8–11]. Entretanto,

*Endereço Eletrônico: lourivalmsfilho@uol.com.br

somente mais recentemente Cahill e Glauber [12] discutiram noções como a função P , a função Q e a função de Wigner no contexto de férmions. Esses elementos são introduzidos em contrapartida aos sistemas bosônicos, fato que se torna possível com o uso de variáveis grassmannianas.

Também constatamos na literatura grande interesse no estudo das propriedades de emaranhamento de sistemas multipartites [13, 14]. A existência de emaranhamento está diretamente relacionada à natureza quântica do formalismo, estruturado sobre o espaço de Hilbert e o princípio de superposição. O presente interesse em estados emaranhados é fortemente condicionado pelo entendimento de que este é um ingrediente central em teletransporte, que por sua vez é um elemento estrutural da computação quântica [15, 16].

Neste trabalho, vou analisar o comportamento de um sistema composto pela superposição de estados coerentes com estados números de Fock, empregando a função de Wigner [6], quando submetido a um banho térmico. Tal análise ocorrerá a partir da duplicação apenas com o vácuo do espaço til, dual.

II. DINÂMICA DE CAMPOS TÉRMICOS

Nesta seção, apresentarei uma breve exposição dos princípios da Dinâmica de Campos Térmicos, (DCT), desenvolvida por Takahashi e Umezawa, sem maiores detalhes técnicos em seu aspecto matemático.

Para um sistema no equilíbrio térmico e considerando o ensemble canônico, a média para um observável arbitrário A é definida como:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}[\exp(-\beta H)A], \quad (1)$$

com

$$\beta = \frac{1}{k_b T}, \quad (2)$$

onde Tr , k_b , T , e H são, respectivamente, o

traço, a constante de Boltzmann, a temperatura, a função de partição e o hamiltoniano do sistema. A média de A pode ser obtida usando a base dos autoestados do hamiltoniano, $|n\rangle$,

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (3)$$

$$\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}, \quad (4)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1, \quad (5)$$

sendo E_n , a energia associada ao estado $|n\rangle$, e $\delta_{m,n}$, a função delta de Kronecker. Podemos reescrever (1) usando esta base, dita de Fock,

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= Z^{-1}(\beta) \sum_{(n)} \langle n | \exp(-\beta H) A | n \rangle \\ &= Z^{-1}(\beta) \sum_{(n)} \exp(-\beta E_n) \langle n | A | n \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Como queremos o valor médio do operador em um estado termalizado, definido em um espaço de Hilbert apropriado, temos

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle \\ &= Z^{-1}(\beta) \sum_{(n)} \exp(-\beta E_n) \langle n | A | n \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Aplicando a relação de completeza ao estado $|0(\beta)\rangle$,

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{(n)} |n\rangle\langle n|0(\beta)\rangle = \sum_{(n)} g_n(\beta)|n\rangle, \quad (8)$$

onde $g_n(\beta) = \langle n|0(\beta)\rangle$ é uma função escalar. Logo, podemos escrever a média de A como

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \sum_{(n,m)} \langle 0(\beta) | n \rangle \langle n | A | m \rangle \langle m | 0(\beta) \rangle \\ &= g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n | A | m \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Para que a Eq. (9) satisfaça a condição em (7), o produto das funções escalares deve ser

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = Z^{-1}(\beta) \sum_{(n,m)} \exp(-\beta E_n) \delta_{m,n}. \quad (10)$$

Como na equação acima, em seu lado direito, temos a função delta de Kronecker, ela sugere um produto escalar de vetores. Para justificar a igualdade, considera-se que o ente leva informações de dois espaços vetoriais distintos, sendo um, o espaço de Hilbert original e um outro, a determinar. Como as propriedades da base de Fock têm de ser preservadas, propõe-se para o segundo espaço a base $\{|\tilde{n}\rangle\}$ tal que

$$\tilde{H}|\tilde{n}\rangle = E_n|\tilde{n}\rangle, \quad (11)$$

$$\langle \tilde{n}|m\rangle = \delta_{m,n}, \quad (12)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{n}\rangle\langle \tilde{n}| = 1, \quad (13)$$

onde \tilde{H} é o hamiltoniano de um sistema fictício, sistema til ou dual, que tem como autovetores os elementos da base $\{|\tilde{n}\rangle\}$ e, como autovalor, E_n , idêntico ao autovalor da Eq. (3). Desta forma o ente $|0(\beta)\rangle$ é um elemento de um espaço de Hilbert, cuja base é formada pelo produto tensorial dos elementos da base $\{|\tilde{n}\rangle\}$ pelos elementos da base do espaço original, $\{|n\rangle\}$,

$$g_n(\beta) = f_n(\beta)|\tilde{n}\rangle, \quad (14)$$

e

$$|0(\beta)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \otimes f_n|\tilde{n}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n|n, \tilde{n}\rangle. \quad (15)$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle \\ &= \sum_{m,n} f_n^*(\beta)f_m(\beta)\langle n, \tilde{n}|A|m, \tilde{m}\rangle \\ &= \sum_{m,n} f_n^*(\beta)f_m(\beta)\delta_{m,n}\langle n, |A|m\rangle \\ &= \sum_n f_n^*(\beta)f_n(\beta)\langle n|A|n\rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

onde o operador A atua apenas no espaço de

Hilbert original. Comparando com a Eq. (6),

$$f_n^*(\beta)f_n(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta E_n), \quad (17)$$

e o estado $|0(\beta)\rangle$, vácuo termalizado, é descrito por:

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_{(n)} \exp\left(-\beta \frac{E_n}{2}\right) |n, \tilde{n}\rangle. \quad (18)$$

Temos, então, o estado de vácuo termalizado no espaço de Hilbert duplicado que, como se percebe, é constituído por quanta, $|n, \tilde{n}\rangle$.

A dinâmica de campos térmicos, DCT, é então introduzida por dois ingredientes básicos: primeiro, considerando a álgebra dos operadores de von Neumann no espaço de Hilbert, existe um conjunto de operadores que comutam introduzidos por uma conjugação modular; isto corresponde a uma duplicação do espaço de Fock original do sistema, levando-o ao espaço expandido $H_T = H \otimes \tilde{H}$. A conjugação modular é expressa pelo mapeamento $\tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$, associando a cada operador A atuando sobre o espaço H com dois operadores em H_T , A e \tilde{A} , que estão conectados por uma conjugação modular em uma c^* -álgebra:

$$\begin{aligned} (A_i A_j)^{\sim} &= \tilde{A}_i \tilde{A}_j, \\ (cA_i + A_j)^{\sim} &= c^* \tilde{A}_i + \tilde{A}_j, \\ (A_i^\dagger)^{\sim} &= (\tilde{A}_i)^\dagger, \\ (\tilde{A}_i)^{\sim} &= -\epsilon A_i, \end{aligned} \quad (19)$$

com $\epsilon = -1$ para bósons e $\epsilon = +1$ para férmions. Em DCT, a conjugação modular é também chamada de normas de conjugação til. As variáveis til, definidas nos comutadores da álgebra de von Neumann estão associados com os geradores do grupo modular dados por $\hat{A} = A - \tilde{A}$. Com esses elementos, as representações redutíveis do grupo de Lie podem ser estudadas; em particular, simetrias cinemáticas tais como, o grupo de Lorentz. Isto dá lugar a equação de movimento tipo Liouville-von Neumann. O segundo ingrediente básico é uma transformação de Bogoliubov, $B(\alpha)$, introduzindo uma rotação nas variáveis til e não-

til, tais que os efeitos térmicos emirjam de um estado condensado. O parâmetro de rotação α está associado à temperatura, e este procedimento é equivalente à média térmica estatística usual. Em uma notação duplicada tradicional,

$$A^r(\alpha) = \begin{pmatrix} A(\alpha) \\ \epsilon \tilde{A}^\dagger(\alpha) \end{pmatrix} = B(\alpha) \begin{pmatrix} A \\ \epsilon \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (20)$$

com $(A^r(\alpha))^\dagger = (A^\dagger(\alpha), \epsilon \tilde{A}(\alpha))$, e a transformação de Bogoliubov dada por

$$B(\alpha) = \begin{pmatrix} u(\alpha) & -v(\alpha) \\ \epsilon v(\alpha) & u(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

onde $u^2(\alpha) + \epsilon v^2(\alpha) = 1$.

A parametrização da transformação de Bogoliubov em DCT é obtida fazendo $\alpha = \beta = T^{-1}$, e por estabelecer que a média do operador número termalizado, $N(\alpha) = a^\dagger(\alpha)a(\alpha)$, isto é $\langle N(\alpha) \rangle_\alpha = \langle 0, \tilde{0} | a^\dagger(\alpha)a(\alpha) | 0\tilde{0} \rangle$, fornece a distribuição de Bose ou de Fermi, ou seja,

$$N(\alpha) = v^2(\beta) = (\exp(\beta\epsilon) + \xi)^{-1}. \quad (22)$$

Por simplicidade de notação, temos usado $A \equiv a$ e $\tilde{A} = \tilde{a}$, e

$$a(k) = u(\alpha)a(k, \alpha) + v(\alpha)\tilde{a}^\dagger(k, \alpha),$$

tal que os outros operadores $(a^\dagger(k), \tilde{a}(k), \tilde{a}^\dagger(k))$ são obtidos ao se aplicar o hermitiano ou as regras de conjugação til. É então mostrado que a média térmica, $\langle N(\alpha) \rangle_\alpha$ pode ser escrita como $\langle N(\alpha) \rangle_\alpha = \langle 0(\alpha) | a^\dagger a | 0(\alpha) \rangle$, onde $|0(\alpha) \rangle$ é dado por $|0(\alpha) \rangle = U(\alpha)|0, \tilde{0} \rangle$, com

$$U(\alpha) = \exp\left(\theta(\alpha) \left[a^\dagger \tilde{a}^\dagger - a \tilde{a} \right]\right).$$

O espaço de Hilbert é constituído dos estados β , $|0(\beta) \rangle = U(\beta)|0, \tilde{0} \rangle$ com

$$|0, \tilde{0} \rangle = \underbrace{\otimes}_{\kappa} |0, \tilde{0} \rangle_{\kappa},$$

e $|0, \tilde{0} \rangle_{\kappa}$ é o vácuo para o modo κ . Então,

$$\begin{aligned} a(\kappa, \beta)|0(\beta) \rangle &= \tilde{a}(\kappa, \beta)|0(\beta) \rangle, \\ &\text{e} \\ \langle 0(\beta)|0(\beta) \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Isto mostra que $|0(\beta) \rangle$ é um vácuo para os operadores termalizados $a(\kappa, \beta)$. Entretanto, ele é um condensado para os operadores a e a^\dagger .

Considerando apenas o modo do campo, pode-se escrever $|0(\beta) \rangle$ em termos das funções $u(\beta)$ e $v(\beta)$ como segue

$$\begin{aligned} |0(\beta) \rangle &= \frac{1}{u(\beta)} \exp\left[\frac{u(\beta)}{v(\beta)} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right] |0, \tilde{0} \rangle, \\ &= \frac{1}{u(\beta)} \sum_{(n)} \left[\frac{u(\beta)}{v(\beta)}\right]^n |n, \tilde{n} \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Definindo,

$$\rho_{nn}^{1/2} = \frac{1}{u(\beta)} \sum_{(n)} \left[\frac{u(\beta)}{v(\beta)}\right]^n,$$

temos

$$|0(\beta) \rangle = \sum_{(n)} \rho_{nn}^{1/2}(\beta) |n, \tilde{n} \rangle = \rho^{1/2}(\beta) |I \rangle, \quad (24)$$

com $|I \rangle = \sum_{(n)} |n, \tilde{n} \rangle$ e

$$\begin{aligned} \rho(\beta) &= \frac{1}{|u(\beta)|^2} \left[\frac{|v(\beta)|^2}{|u(\beta)|^2}\right]^{a^\dagger a} \\ &= \frac{1}{|u(\beta)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{|v(\beta)|^2}{|u(\beta)|^2}\right]^n |n \rangle \langle n|, \end{aligned} \quad (25)$$

ou

$$\begin{aligned} \rho(\beta) &= \frac{1}{1 + \tilde{n}(\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{\tilde{n}(\beta)}{1 + \tilde{n}(\beta)}\right]^r |r \rangle \langle r|, \\ \tilde{n}(\beta) &= \frac{1}{\exp \beta\omega - 1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Assim, a média de um observável A é dada por

$$\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \sum_{(n)} \rho_{nn}(\beta) A_{nn} = \text{Tr} [\rho(\beta) A], \quad (27)$$

A seguir temos exemplos de estados termalizados, o coerente e o número de Fock,

$$\begin{aligned} |\alpha, \beta \rangle &= U(\beta) D(\alpha) |0, \tilde{0} \rangle = D(\alpha, \beta) \\ &= \exp\left[\alpha a^\dagger(\beta) - \alpha^* a(\beta)\right] |0(\beta) \rangle, \end{aligned}$$

e

$$|n, \beta\rangle = U(\beta) \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0, \tilde{0}\rangle = \frac{(a^\dagger(\beta))^n}{\sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle,$$

com $D(\alpha)$ e $D(\alpha, \beta)$ sendo operadores unitários de deslocamentos não-termalizado e termalizado, respectivamente, e α um número complexo arbitrário; o termo “operador deslocamento” vem da propriedade

$$D^\dagger(\alpha, \beta) a(\beta) D(\alpha, \beta) = a(\beta) + \alpha.$$

Usando o fato que

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle = \left[u(\beta)a + v(\beta)\tilde{a}^\dagger \right] |0(\beta)\rangle = 0, \quad (28)$$

os operadores termalizados podem ser descritos somente em termos de operadores não-til

$$a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{a^\dagger}{u(\beta)} |0(\beta)\rangle.$$

Dessa forma, os estados coerente e número termalizados são

$$|\alpha, \beta\rangle = \exp\left(\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp\left[\frac{\alpha a^\dagger}{u(\beta)}\right] |0(\beta)\rangle, \quad (29)$$

e

$$|n, \beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[\frac{a^\dagger}{u(\beta)} \right]^n |0(\beta)\rangle. \quad (30)$$

Para identificar a natureza física de tais estados térmicos, calculamos as correspondentes matrizes densidades

$$\begin{aligned} \rho_{|\alpha(\beta)\rangle} &= \exp(-|\alpha|^2) \exp\left[\frac{\alpha a^\dagger}{\sqrt{1 + \tilde{n}(\beta)}}\right] \rho_\beta \times \\ &\times \exp\left[\frac{\alpha^* a}{\sqrt{1 + \tilde{n}(\beta)}}\right], \end{aligned} \quad (31)$$

e

$$\rho_{|n(\beta)\rangle} = \frac{a^\dagger \rho_\beta a^n}{n! [1 + \tilde{n}(\beta)]^n}. \quad (32)$$

Outros tipos de estados podem ser obtidos usando operadores til.

A seguir, investigarei propriedades não clássicas de estados térmicos introduzidos pela superposição de estados coerente com os de Fock, a partir da função de Wigner.

III. PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DE ESTADOS DE FÓTONS TÉRMICOS

A. O Sistema e a Matriz Densidade

Usando a estrutura da álgebra linear da DCT, exploro a superposição de estados com excesso de fótons. Seja a superposição

$$|\psi(n, \alpha)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (A|\alpha\rangle + B|n\rangle), \quad (33)$$

onde o fator de normalização é

$$N = A^2 + 2 \frac{AB \Re(\alpha^n) \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)}{\sqrt{n!}} + B^2. \quad (34)$$

Realizando o produto tensorial com $|\tilde{0}\rangle$,

$$|\psi(\alpha, n, \tilde{0})\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (A|\alpha, \tilde{0}\rangle + B|n, \tilde{0}\rangle),$$

que pode ser reescrita como segue

$$\begin{aligned} |\psi(\alpha, n, \tilde{0})\rangle &= \frac{1}{\eta} \left[A \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \times \right. \\ &\times \left. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m, \tilde{0}\rangle + B |n, \tilde{0}\rangle \right], \end{aligned} \quad (35)$$

com $\eta = 1/\sqrt{N}$. Usando a transformação de Bogoliubov e escrevendo os vetores em termos de vácuo do espaço duplicado, resulta

$$|\psi(\alpha, n, \tilde{0}; \beta)\rangle = \frac{1}{\eta} \left[A \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \left(a^\dagger(\beta)\right)^m |0, \tilde{0}; \beta\rangle + B \frac{\left(a^\dagger(\beta)\right)^\dagger}{\sqrt{n!}} |0, \tilde{0}; \beta\rangle \right]. \quad (36)$$

Considerando $\rho(\beta)$ dado pelas equações (25-26) e (31-32) após algumas operações algébricas, a

matriz densidade pode ser descrita como

$$\begin{aligned} \rho_{|\psi(\alpha, n; \beta)\rangle} &= \frac{1}{N(1 + \tilde{n}(\beta))} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{\tilde{n}(\beta)}{1 + \tilde{n}(\beta)} \right]^r + \left\{ \left[\sum_{m, m'=0}^{\infty} \frac{A^2 \alpha^{*m} \alpha^{m'}}{m! m'!} \frac{\sqrt{(r+m')!(r+m)!}}{[u(\beta)]^{(m+m')}} \frac{r!}{r!} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left| r+m' \right\rangle \langle r+m| + \frac{B^2 (r+n)!}{n! r!} \left| r+n \right\rangle \langle r+n| \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{AB \exp\left(\frac{-\alpha^2}{2}\right)}{[u(\beta)]^{(m+n)}} \frac{\sqrt{(r+m)! (r+n)!}}{m! r! \sqrt{n!}} \times \\ &\times \left. \left(\alpha^m \left| r+m \right\rangle \langle r+n| + \alpha^{*m} \left| r+n \right\rangle \langle r+m| \right) \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

B. A Função de Wigner

Uma das representações básicas de um estado modo campo no espaço de fase é a função de Wigner. Definida como a transformada de Weyl do operador densidade, o resultado dessa transformação é uma quase probabilidade e está associado ao caráter clássico ou quântico do sistema estudado: resultados positivos indicam que o sistema possui características clássicas, enquanto os negativos, características quânticas. A função de Wigner é

$$\begin{aligned} W(p, q) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^L} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ \exp\left(\frac{-iQp}{\hbar}\right) \times \\ &\times \left\langle q + \frac{Q}{2} \left| \rho \right| q - \frac{Q}{2} \right\rangle, \quad (38) \end{aligned}$$

onde L representa o número de dimensões da integração, ρ , p e q são respectivamente, o operador densidade, o momentum e a coordenada espacial do sistema [17].

Para o sistema estudado, Eq.(36) e com a sua matriz densidade expressa pela eq.(37), após algumas operações algébricas, a função de Wigner assume a forma

$$\begin{aligned} W(p, q; \beta) &= \frac{1}{N\pi\hbar(1 + \tilde{n}(\beta))} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left[\frac{\tilde{n}(\beta)}{1 + \tilde{n}(\beta)} \right]^r \times \\ &\times \{w_{\alpha\alpha} + w_{nm} + w_{\alpha n} + w_{n\alpha}\}, \quad (39) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} w_{\alpha\alpha} &= A^2 \sum_{m, m'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*m} \alpha^{m'}}{m! m'!} \frac{(-1)^{r+m'}}{2^{\left(r + \frac{m+m'}{2}\right)}} \frac{\exp\left[-\left(\frac{q^2}{b^2} - \tau\right)\right]}{[u(\beta)]^{m+m'}} \times \\ &\times \begin{cases} 2^{(r+m)} (r+m')! \gamma^{(m-m')} L_{r+m'}^{m-m'} [2|\gamma|^2], & \text{para } m \geq m' \\ 2^{(r+m')} (r+m)! (-\gamma)^{(m'-m)} L_{r+m}^{m'-m} [2|\gamma|^2], & \text{para } m < m'; \end{cases} \end{aligned}$$

$$w_{nn} = \frac{B^2(-1)^{r+n} \exp(-|\gamma|)}{[u(\beta)]^{2n} n!} L_{r+n} [2|\gamma|^2]; \quad (40)$$

$$w_{\alpha n} = AB \exp \left[- \left(\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+n} \alpha^{*m} \exp(-|\gamma|^2)}{m! \sqrt{n!} [u(\beta)]^{m+n} 2^{r+\frac{m+n}{2}}} \times$$

$$\times \begin{cases} 2^{(r+m)} (r+n)! \gamma^{(m-n)} L_{r+n}^{m-n} [2|\gamma|^2], & \text{para } n \leq m \\ 2^{(r+n)} (r+m)! (-\gamma)^{(n-m)} L_{r+m}^{n-m} [2|\gamma|^2], & \text{para } n > m; \end{cases}$$

$$w_{n\alpha} = AB \exp \left[- \left(\frac{|\alpha|^2}{2} \right) \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+m} \alpha^m \exp(-|\gamma|^2)}{m! \sqrt{n!} [u(\beta)]^{m+n} 2^{r+\frac{m+n}{2}}} \times$$

$$\times \begin{cases} 2^{(r+n)} (r+m)! \gamma^{(n-m)} L_{r+m}^{n-m} [2|\gamma|^2], & \text{para } n \geq m \\ 2^{(r+m)} (r+n)! (-\gamma)^{(m-n)} L_{r+n}^{m-n} [2|\gamma|^2], & \text{para } n < m; \end{cases}$$

onde

$$\gamma = \tau + q/b, \quad -\gamma = \tau^* - q/b, \quad \tau = -ipb/\hbar$$

$$|\gamma|^2 = (q/b)^2 - \tau^2, \quad b = \sqrt{\hbar/m\omega}.$$

Com esta função, faz-se o mapeamento do sistema no espaço de fase e, considerando que ela é uma quasi-probabilidade por con-

ter também valores negativos, estes estão associados ao caráter quântico do sistema, enquanto seus valores positivos estão associados ao caráter clássico.

Alguns gráficos referentes à função de Wigner (39) estão ao final das referências.

-
- [1] H.T.C. Stoof, M. Houbiers, C.A. Sackett, R.G. Hulet. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 10 (1996).
- [2] C.J. Myatt, E.A. Burt, R.W. Grist, E.A. Cornell, C.E. Wieman. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586 (1997).
- [3] E. Hodby, S.T. Thompson, C.A. Regal, M. Greiner, A.C. Wilson, D.S. Jin, E.A. Cornell, C.E. Wieman. *arXiv:cond-mat/0411487*, (2004).
- [4] K.E. Strecker, G.B. Partridge, R. G. Hulet. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080406 (2003).
- [5] J. Cubizolles, T. Bourdel, S.J.J.M.F. Kokkelmans, G.V. Shlyapnikov, C. Salomon. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240401 (2003).
- [6] H. Belich, L.M. Silva, J.A. Helayël-Neto, A.E. Santana. *Phys. Rev. D* **84**, 045007-1 (2011).
- [7] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S.J.J.M.F. Kokkelmans, C. Salomon. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 050401 (2004).
- [8] Y. Ohnuki, T. Kashiwa. *Prog. Theor. Phys.* **60**, 548 (1978).
- [9] F. Hong-yi. *Phys. Rev. A* **40**, 4237 (1989).
- [10] K. Svozil. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3341 (1990).
- [11] S. Chaturvedi R. Sandhya, V. Srinivasan, R. Simon. *Phys. Rev. A* **41**, 3969 (1990).
- [12] K.E. Cahill, R.J. Glauber. *Phys. Rev. A* **59**, 1538 (1999).
- [13] A. Shimony, *Measures of Entanglement, in The Dilemma of Einstein, Podolsky and Rosen – 60 Years Later*. Editors: A. Mann, M. Revzen. Bristol: IOP (1996).
- [14] G. Alber, T. Beth, M. Horodecki, R. Horodecki, M. Rötteler, H. Weinfurter, R. Werner, A. Zeilinger, *Quantum Information*. Berlin: Springer-Verlag (2001).
- [15] C.H. Bennett, Z. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [16] D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger. *Nature* **390**, 575 (1997).
- [17] M.A. Marchioli, *Quantum Mechanics in Phase Space: I. The Weyl-Wigner Formalism*. Rev. Bras. Ens. Fis. **24**, (4) 421 (2002).

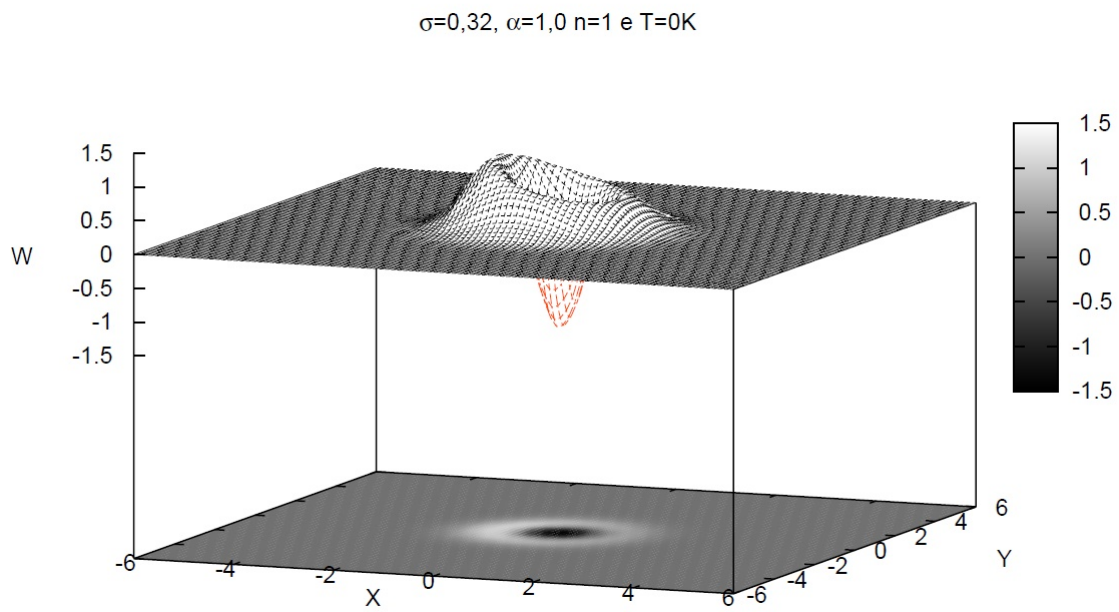


FIGURA 1: Função de Wigner: gráfico geral.

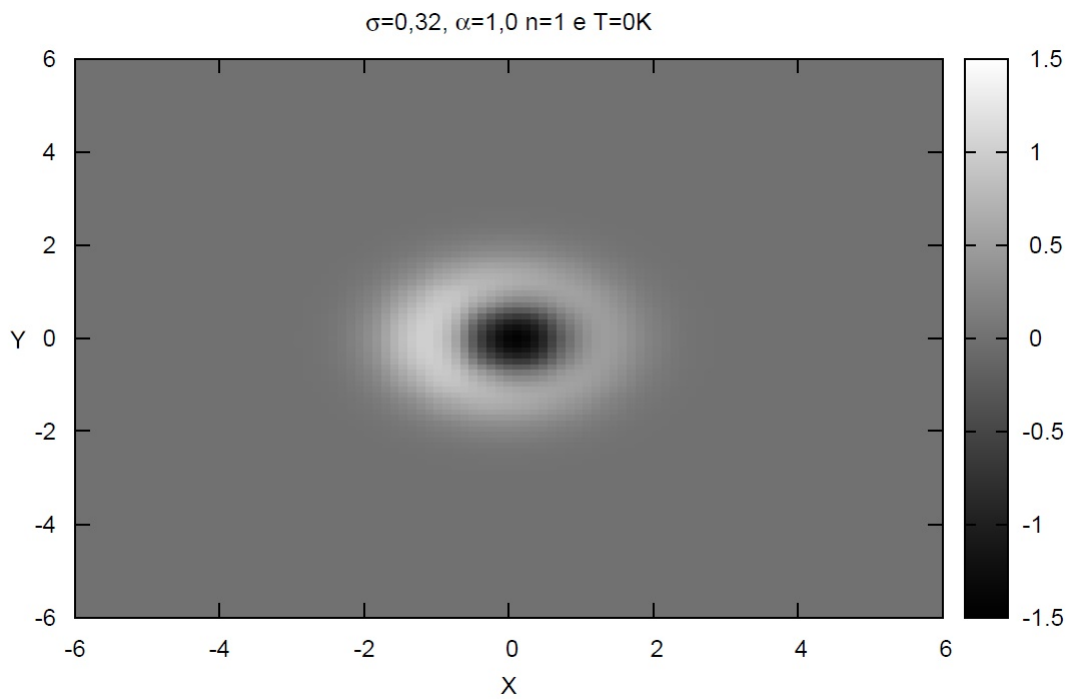


FIGURA 2: Função de Wigner: vista do plano XY.