

## ***TeVes*: uma alternativa ao modelo da matéria escura**

### ***TeVes: an alternative to the dark matter model***

Carlos Eduardo M. Batista\*

*Departamento de Física – UEFS*

*Campus UEFS, Feira de Santana – BA. 44036-900.*

A matéria escura continua sendo um desafio para a Física, uma vez que ela não é detectada nem existe um modelo teórico que possa prever de maneira clara a sua existência. No entanto, ela é necessária tendo em vista que as curvas planas de rotação de galáxias só são compreendidas pela imposição à força de sua existência. Por outro lado, na década de 1980 foi proposta uma modificação da gravitação (MOND) de tal maneira que não seria necessário impor uma componente não-visível. Em 2004 Bekenstein propôs o *TeVes*, a mais completa e bem sucedida teoria da família MOND. Contudo, tanto as teorias da família MOND quanto o postulado da matéria escura possuem pontos fortes e fracos.

**Palavras-chaves: Matéria Escura; TeVeS; MOND.**

The dark matter keeps as a challenge for Physics, since it is not detectable and there is not a theoretical model which preview its existence in a undoubtedly way. However, the dark matter is necessary as the plane curves of the galaxy rotations only be understood when this hypotheses is takes into account for. On the other hand, in the 1980s, a change in gravitation (MOND) was proposed in a way that it would not be necessary to impose an invisible component. In 2004 Bekenstein proposed *TeVes*, a more complete and very detailed theory of the MOND family. However, as much as theories of the MOND family as the postulate of dark matter has strengths and weaknesses.

**Key-words: Dark Matter; TeVeS; MOND.**

## **I. INTRODUÇÃO**

Ao longo dos tempos muitas tentativas surgiram no intuito de compreender e explicar os movimentos celestes, mas foi Newton que apresentou a primeira teoria séria de gravitação a qual poderia fazer diversas previsões em pleno acordo com a experiência. No entanto, observou-se gradualmente que também havia vários fenômenos que o modelo Newtoniano se mostrava incapaz de explicar. No início do século XX, Einstein propõe a Relatividade Geral que é uma teoria de gravitação muito mais robusta que a formulada por Newton. A teoria obteve grande sucesso por estar em acordo com vários experimentos. Vários outros modelos surgiram nos últimos 100 anos a fim de generalizar a relatividade geral ou até mesmo

confrontá-la. O modelo padrão  $\Lambda$ CDM consiste em adicionar uma constante cosmológica à equação de Einstein original. O modelo é de grande aceitação, pois é capaz de prever a aceleração do universo a partir de um efeito anti-gravitacional promovido pela constante cosmológica.

A constante cosmológica é responsável por uma força repulsiva proporcional à distância ao contrário da gravitacional, e por isso é capaz de acelerar o universo. Segundo dados da anisotropia da radiação de fundo e de supernovas tipo Ia, a matéria contribui com  $\Omega_m = 0.25$ , e a energia escura com  $\Omega_\Lambda = 0.75$ . Apesar de suas vantagens, o modelo apresenta também pontos fracos, como por exemplo, o valor predito para a constante cosmológica é cerca de  $10^{123}$  vezes o valor observado ( $\Lambda/8\pi G \approx 10^{-47} GeV^4$ ). Um valor pequeno de  $\Lambda$  garante que o universo começou a acelerar recentemente, dando origem ao proble-

---

\*Endereço Eletrônico: cdumagalhaes@hotmail.com

ma da coincidência. Além do mais uma quantidade de matéria escura fria (CDM) nunca foi detectada.

Em 2004 [1], Bekenstein apresenta uma teoria mais complexa que as escalares tensoriais. Trata-se de uma teoria relativística que se reduz no seu limite não-relativístico à dinâmica Newtoniana quando as acelerações das estrelas nas periferias das galáxias são muito maiores do que  $a_0 \approx 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ , e ao MOND quando as acelerações são bem menores do que  $a_0$ .

A teoria, que é chamada TeVeS e significa Tensor Vector Scalar, possui além do tensor métrico, dois campos escalares e um vetorial. A teoria também faz previsões corretas a respeito do desvio da luz pelas galáxias, se for levado em conta apenas a matéria luminosa. Porém, ela também parece necessitar de um acréscimo de uma quantidade de matéria escura nos aglomerados de galáxias. Na seção 2 é apresentado o conceito de matéria escura com uma abordagem da lei de Tully-Fisher. Em seguida, na seção 3, é feita a apresentação do modelo concorrente, o MOND. Na seção 4, as teorias da família MOND são discutidas para, em seguida, tratar das transformações disformes na seção 5. Finalmente, na seção 6 discuto os fundamentos do TeVeS de maneira que permita, na seção 7, a apresentação de uma discussão e comparação entre o MOND e a matéria escura.

## II. MATÉRIA ESCURA

Por mais de sete décadas [2] a matéria escura tem sido postulada para explicar as grandes velocidades de partículas (estrelas e gases) na periferia das galáxias (formando uma curva de rotação plana a poucos kiloparsecs do centro, onde  $1 \text{ ps} \approx 3 \text{ anos-luz}$ ), mantendo para isso a gravitação Newtoniana intacta. A noção de matéria escura vai desde sistemas constituídos por galáxias anãs esferóides com massa aproximadamente de  $10^7$  massas solares até grandes agrupamentos de galáxias detentoras de massa na faixa de  $10^{14}$  massas solares [1, 3].

De acordo com as medidas de supernovas tipo IA e da anisotropia da radiação de fundo,

cerca de 1/3 da densidade de energia do universo deveria estar na forma de matéria escura e bariônica e os outros 2/3 em um universo plano seria devido a uma componente pouco conhecida denominada energia escura.

Em um universo plano, a contribuição da densidade de energia da matéria bariônica seria aproximadamente 5% e a da não-bariônica 25%. A maior parte da matéria não visível estaria na forma não-bariônica. Inicialmente supôs-se que toda matéria escura estaria na forma de neutrinos, entretanto hoje é sabido que isso não seria possível se sua massa estiver em torno de 0.05 eV; neste caso a razão entre a densidade de energia dos neutrinos e a densidade de energia total do universo para curvatura nula é dado por  $\Omega_\nu = (\rho_\nu/\rho_c) \approx 10^{-3}$ . Se a matéria escura fosse composta de neutrinos apenas, a massa dos neutrinos deveria estar em torno de 30 – 70 eV para valores razoáveis da constante de Hubble. Experimentos realizados por Mains e Troisk mostraram que o limite máximo para a massa dos neutrinos seria de aproximadamente 2.2 – 2.5 eV. Por este ponto de vista, os neutrinos não poderiam ser a componente dominante da matéria escura.

Historicamente a idéia de matéria escura surgiu em 1933 quando Zwicky [4] percebeu que as velocidades das galáxias individuais dentro do aglomerado de Coma era grande, e este aglomerado só poderia estar gravitacionalmente ligado se a massa total do aglomerado fosse superior à soma das massas das galáxias individuais. Parte da matéria não luminosa nos aglomerados de galáxias estaria em torno das galáxias, região denominada halo, enquanto que outra parte estaria distribuída em outras regiões.

Ao se observar o gráfico da velocidade de uma partícula teste (estrela) em função de sua distância ao centro da galáxia (geralmente espiral), gráfico também chamado de curva de rotação, percebe-se que ao invés da velocidade decair nas regiões onde a luz emitida pela galáxia cessa, ela se torna aproximadamente constante. Isso só poderia ser possível caso fosse postulado a existência de uma componente invisível de matéria, com características diferentes da bariônica. Por exemplo, a massa bariônica é proporcional ao cubo do raio,

$m_b(r) \propto r^3$ , admitindo a densidade constante, enquanto que a massa não-bariônica seria proporcional ao raio  $m_D(r) \propto r$ , a fim de explicar as curvas planas de rotação de galáxias. Não se sabe quase nada a respeito desta componente, e existem modelos que preferem mudar a gravidade e manter apenas a matéria luminosa das galáxias.

A distribuição da matéria escura nas galáxias e nos aglomerados de galáxias é bem diferente. Nas galáxias a matéria escura aumenta proporcionalmente com a distância ao centro. Nos aglomerados de galáxias, a medida do forte desvio da luz por estes aglomerados indica que neles a matéria escura está fortemente concentrada em uma região central de raio aproximadamente igual a 0.2 a 0.3 Mpc. A matéria não luminosa também pode ser composta por matéria bariônica não detectada, já que podem existir estruturas como planetas gigantes e estrelas afastadas que não seriam capazes de emitir quantidade de luz suficiente para serem observadas. Uma característica da matéria escura não-bariônica, é que ela não interage com as ondas eletromagnéticas e, por isso não pode ser detectada observando fótons nas várias frequências. A maior parte da matéria bariônica nos aglomerados de galáxias está na forma de gases quentes emitindo raio X. Contudo, nenhuma evidência direta foi encontrada para supor a existência de matéria escura, apesar dos inúmeros esforços. A postulação da matéria escura visa manter a relatividade geral intacta para explicar as lentes gravitacionais e reproduzir as curvas planas de rotação de galáxias.

### A. Lei de Tully-Fisher

A lei de Tully-Fisher afirma que a luminosidade do disco da galáxia perto do infravermelho (banda H)  $L_H$  é proporcional à quarta potência da velocidade de rotação na região plana da curva (*plateau*) [3, 5]:

$$L_H \propto V_c^4. \quad (1)$$

O fator de proporcionalidade é constante dentro de cada classe morfológica de galáxia [1].

Para galáxias espirais, este fator está relacionado à razão  $(M/L) \approx 10 - 20 (M_\odot/L_\odot)$  [1], onde  $M_\odot$  e  $L_\odot$  correspondem à massa e luminosidade solar respectivamente, sendo que a massa luminosa de uma galáxia típica gira em torno de  $10^{11} M_\odot$ . Esta versão da lei de Tully-Fisher só foi estabelecida após o MOND ser enunciado [1], e a luz infravermelha de uma galáxia provém em sua maior parte de estrelas anãs frias que correspondem à maior parte da massa da galáxia. Surge também uma relação de proporcionalidade entre  $M$  (massa visível da galáxia) e  $L_H$ . A lei de Tully-Fisher também pode ser enunciada através da relação entre a velocidade da partícula teste no *plateau* (região plana)  $V_c$  e a massa bariônica  $M$  da galáxia geradora do campo [5]:

$$M \propto V_c^4. \quad (2)$$

Devido a luminosidade ser proveniente da matéria visível, e a velocidade na região plana ser mais fixada pelo halo no modelo de matéria escura, então a lei de Tully-Fisher requer um ajuste fino entre os parâmetros do halo (como velocidade de dispersão) e os parâmetros do disco visível [1].

A Eq.(2) é uma relação entre a massa visível e a velocidade de rotação no *plateau*, que é devido aos efeitos desta componente visível. Nesta relação é a matéria visível que fixa a velocidade de rotação na região plana. No entanto, se houver presença de matéria escura, a matéria luminosa não seria a única responsável pelos valores das velocidades na curva de rotação e, portanto a lei de T.F. perderia seu sentido. Porém, a lei de Tully-Fisher é uma lei segura, e por isso um ajuste fino é necessário a fim de tentar conciliar a postulação da matéria escura com sua formulação. Contudo, um ajuste fino na região de transição entre os efeitos do disco e do halo implica no aparecimento de um *calombo* na curva de rotação, o qual não é observado. Novamente, outro ajuste fino é necessário para evitar o *calombo* formado [5].

A lei empírica de Tully-Fisher é uma correlação bem afiada. Ela também forma a base para um dos métodos mais seguros nas medidas de distâncias de galáxias espirais [1]. Portanto,

do ponto de vista da matéria escura, a lei de Tully-Fisher é um mistério [1, 5].

### III. PARADIGMA MOND

Uma maneira alternativa de compreender o problema das curvas planas de rotação de galáxias, sem invocar a presença de matéria escura em volta das galáxias, é o de alterar a gravidade Newtoniana. Os primeiros modelos empíricos enfatizavam uma modificação da gravitação em largas escalas, mas Milgrom [3] demonstrou que para um modelo ser consistente, a modificação deveria ocorrer a partir de uma escala aceleração e não a partir de uma escala distância. A primeira proposta satisfatória, na forma de uma lei empírica, em modificar a dinâmica Newtoniana foi feita por Milgrom no início dos anos 80 e ficou conhecida como MOND (Modified Newtonian Dynamics), na qual a dinâmica Newtoniana deve ser modificada nas regiões onde a aceleração das partículas testes que se encontram na periferia das galáxias é menor que  $a_0 \approx 10^{-8} \text{ cm/s}^2$ .  $a_0$  é uma constante com dimensão de aceleração. O MOND prediz que a familiar igualdade entre a aceleração  $\vec{a}$  da partícula teste e o campo Newtoniano  $\vec{g}_N$  não se mantém necessariamente [5]. A relação proposta por Milgrom foi:

$$\mu\left(\frac{|\vec{a}|}{a_0}\right) \vec{a} = \vec{g}_N, \quad (3)$$

sendo que  $\vec{g}_N = -\vec{\nabla}\Phi_N$  é o campo gravitacional convencional,  $\Phi_N$  é o potencial Newtoniano, e  $\mu$  é uma função que deve obedecer a:

$$\mu(x) \approx x \text{ se } x \ll 1, \quad (4)$$

$$\mu(x) \mapsto 1 \text{ se } x \gg 1. \quad (5)$$

Milgrom estimou  $a_0 \approx 10^{-8} \text{ cm/s}^2$  [1]. O valor foi ajustado para reproduzir a fenomenologia das curvas planas através de uma modificação na gravidade.

Analisando as equações do MOND em seus respectivos limites, percebe-se que na escala do sistema solar, onde a aceleração é grande comparada com  $a_0$ , a dinâmica Newtoniana é reencontrada, isto é,  $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi_N$  ( $\Phi_N$  é o potencial

Newtoniano).

A modificação da gravitação Newtoniana pelo MOND é suficiente para reproduzir as curvas planas de rotação de galáxias, sem a necessidade de recorrer à postulação de uma componente invisível de matéria permeando o universo. As modificações imposta pelo MOND fazem bastante sentido nas escalas onde as acelerações das partículas testes são muito menores do que  $a_0$ , e isto ocorre principalmente na região fora do visível, ou seja, além da periferia de galáxias espirais.

O MOND não é uma teoria, mas sim uma formulação empírica para que uma teoria relativística consistente se reduza à sua regra no limite apropriado. O modelo também está de acordo com a lei de Tully-Fisher [2], que é uma correlação entre a luminosidade infravermelha de um disco de galáxia de massa  $M$  e a velocidade de rotação de uma partícula teste de massa  $m$  na região plana da curva de rotação, como será mostrado adiante.

Nas escalas em que a aceleração da partícula  $|\vec{a}|$  é muito menor do que  $a_0$ , a dinâmica é modificada de acordo com as regras do MOND. Portanto,  $\mu(x) \approx x$ , e

$$\mu(x) |\vec{a}| = |\vec{g}_N|,$$

$$\frac{|\vec{a}|^2}{a_0} \approx \frac{GM}{r^2}.$$

Ao isolar a aceleração  $\vec{a}$  encontra-se [1]:

$$|\vec{a}| = \left(\frac{GMa_0}{r^2}\right)^{1/2}. \quad (6)$$

A equação acima define exatamente a aceleração que a partícula (estrela, nuvens de hidrogênio) deve sofrer além da periferia da galáxia. Como a aceleração centrípeta é dada por  $(V_c^2/r)$ , então junto com a Eq.(6) obtemos:

$$m \frac{V_c^2}{r} = m \frac{(GMa_0)^{1/2}}{r},$$

que acarreta imediatamente o resultado:

$$M = \frac{V_c^4}{Ga_0}. \quad (7)$$

Dividindo a Eq.(7) por  $M$  encontra-se [5]:

$$1 = \frac{V_c^4}{MGa_0}.$$

Multiplca-se os dois lados acima por  $L_H$  que é a luminosidade no infravermelho [1, 5] e, assim,

$$L_H = \frac{L_H V_c^4}{MGa_0},$$

que é o mesmo que

$$L_H = \frac{V_c^4}{(M/L_H)Ga_0}. \quad (8)$$

E como a razão  $\gamma = (M/L_H)$  é constante, a relação de Tully-Fisher (T.F.) é encontrada:

$$L_H \propto V^4. \quad (9)$$

A incrível concordância da Eq.(9) com a lei de T.F (1) mostra que o modelo bariônico obtém mais sucesso que o de matéria escura [3].

Por outro lado, agrupamentos de galáxias parecem possuir 2 vezes, ou mais, a quantidade de matéria que a observada em qualquer forma (gases quentes que emitem raio  $X$  e galáxias do aglomerado) [3]. Desse ponto de vista, o MOND apenas melhorou o problema da massa faltante, deve existir uma quantidade ainda não detectada, seja na forma de bárions, dificilmente observados por equipamentos óticos, ou na forma de neutrinos massivos.

Para os casos em que a aceleração sofrida pela partícula for muito menor do que  $a_0$ , isto é, além da periferia da galáxia tem-se:

$$\frac{|\vec{g}|^2}{a_0} = |\vec{g}_N|. \quad (10)$$

Logo, pela Eq.(6) conseguimos:

$$|\vec{g}| = \frac{(MGa_0)^{1/2}}{r}. \quad (11)$$

Utilizando a relação  $\vec{\nabla}\Phi = -\vec{g}$  e a equação acima, obtém-se o potencial gravitacional modificado para regiões de baixa aceleração. Para isto basta uma pequena integração, e o resultado é um potencial logarítmico que predomina

na região plana da curva de rotação,

$$\Phi(r) = (MGa_0)^{1/2} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (12)$$

Como o MOND não é derivado de lagrangeano, as leis de conservação não são respeitadas. Percebe-se que a Eq.(3) não pode ser verdadeira, pois a partir dela não há conservação do momento linear, angular e da energia. Outro problema é que o princípio de equivalência fraco não é verificado [3, 5]. Também a dinâmica interna de um sistema em queda livre na presença de um campo constante é diferente da dinâmica interna deste mesmo sistema na ausência de campo externo. Claramente, isto corresponde a uma violação do princípio de equivalência forte.

Um problema oriundo do postulado da matéria escura é a falta de sintonia com a lei de Tully-Fisher que é considerada bastante precisa. O motivo é que a luminosidade é proveniente da matéria visível, e a velocidade na região plana é mais fixada pelo halo, então a lei de Tully-Fisher requer um ajuste fino entre os parâmetros do halo (como velocidade de dispersão) e os parâmetros do disco visível [1].

Outra questão fundamental é a origem da constante  $a_0$ , para isso Milgrom argumentou,

*“It is roughly the acceleration that will take an object from rest to the speed of light in the lifetime of the universe. It is also of the order of the recently discovered acceleration of the universe”* [6].

O fato é que ela separa dois regimes (o limite MOND do limite da segunda lei de Newton) e duas regiões físicas (a região dentro do visível e a região fora do visível da galáxia) que coincidem entre si.

Em conclusão, a hipótese da validade da dinâmica Newtoniana em todas as escalas implica necessariamente na existência de uma grande quantidade de matéria escura, uma quantidade nunca detectada. Por outro lado, uma modificação na gravitação pode explicar as curvas planas de rotação de galáxias eliminando naturalmente a necessidade de se recorrer àquilo que não se mede e não se vê.

## IV. TEORIAS DA FAMÍLIA MOND

### A. AQUAL

Como foi mencionado anteriormente o MOND na sua forma inicial é uma formulação empírica que não está conectada com nenhuma outra área da Física e, por isso precisa de uma formulação mais abrangente. O primeiro passo foi criar um modelo equivalente ao MOND, porém derivado de lagrangeano, modelo que ficou conhecido com AQUAL (A QUAdratic Lagrangian). O seu lagrangeano é dado por [5]:

$$L = -\frac{a_0^2}{8\pi G} \tilde{f}\left(\frac{a^2}{a_0^2}\right) - \rho\Phi, \quad (13)$$

onde  $\Phi$  é o verdadeiro potencial,  $\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$  é a aceleração sofrida pela partícula teste, e  $\rho$  é a densidade da matéria total. A partir (13) encontra-se a equação de Poisson modificada,

$$\vec{\nabla} \left[ \tilde{\mu} \left( \frac{|\vec{\nabla}\Phi|}{a_0} \right) \vec{\nabla}\Phi \right] = 4\pi G\rho, \quad (14)$$

como também,

$$\tilde{\mu}(\sqrt{y}) = d\tilde{f}(y)/dy. \quad (15)$$

A regra é  $\tilde{f}(y) \mapsto y$  se  $y \gg 1$ , e  $\tilde{f}(y) \mapsto \frac{2}{3}y^{3/2}$  se  $y \ll 1$ . O AQUAL, ao contrário do MOND, respeita o princípio de equivalência fraco. Em conclusão, o AQUAL cura os problemas de não conservação do MOND. O MOND pode ser visto como uma aproximação do AQUAL.

### B. RAQUAL

RAQUAL é a versão relativística do AQUAL. Naturalmente o RAQUAL é derivado de um lagrangeano, e sua forma é:

$$L_\phi = -\frac{a_0^2}{8\pi G} f\left(\frac{g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}}{a_0^2}\right). \quad (16)$$

A partir da variação em  $\phi$  encontra-se

$$\left[ \mu \left( \frac{g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}}{a_0^2} \right) g^{\mu\nu}\phi_{,\nu} \right]_{;\mu} = -4\pi G \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta},$$

onde  $\mu(y) = (df(y)/dy)$ . No caso de campos fracos da relatividade geral, quando não há possibilidade de produção de velocidades próximas à velocidade da luz a métrica torna-se:

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi_N). \quad (17)$$

No RAQUAL a previsão no mesmo limite é dado pela métrica física abaixo,

$$\tilde{g}_{00} \approx -(1 + 2\Phi_N + 2\phi). \quad (18)$$

Neste caso, o novo potencial é  $\Phi = \Phi_N + \phi$ , e o campo escalar desempenha o papel do potencial gravitacional da suposta matéria escura. Todavia, carrega sérios problemas, como a propagação superluminal do campo  $\phi$ .

### C. PCG

PCG é a teoria que sucede o RAQUAL. Bekenstein sugeriu uma nova teoria envolvendo dois campos escalares que ficou conhecida como PCG (Phase Coupling Gravity).

Neste formalismo surge um campo escalar complexo dado por  $\chi = qe^{i\phi}$  onde  $q$  e  $\phi$  são dois campos escalares. O primeiro representa a amplitude e o segundo a fase do campo escalar  $\chi$ . A teoria recebe este nome em razão que a matéria acopla a fase do campo escalar complexo.

A transformação conforme  $\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi}g_{\alpha\beta}$  é mantida, com  $\phi$  sendo a fase do  $\chi$  que aparece. A ação proposta para este campo é,

$$S_\chi = -\frac{1}{2} \int (g^{\alpha\beta}\chi_{,\alpha}\chi_{,\beta} + V(\chi^*\chi)) \sqrt{-g} d^4x.$$

O potencial  $V(\chi^*\chi)$  representa a autointeração do campo escalar complexo. Em termos dos campos  $q$  e  $\phi$  a ação acima é escrita,

$$S_{q,\phi} = -\frac{1}{2} \int \left[ q_{,\alpha}q^{,\beta} + q^2\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + V(q^2) \right] \times \sqrt{-g} d^4x. \quad (19)$$

Por fim, citamos que no caso da precessão do periélio do Mercúrio a teoria está em conflito com a observação. Em resumo, a teoria é falha.

### V. TeVeS

A última teoria da família MOND e a mais bem sucedida é denominada TeVeS que significa Tensor Vector Scalar, pois possui campos gravitacionais nestas três formas. Seu objetivo principal é,

- 1) explicar as observadas curvas de rotação de galáxias sem invocar a presença de matéria escura,
- 2) explicar as lentes gravitacionais e os fortes desvio da luz sem ter que apelar para a matéria escura.

Nesta teoria, seu limite não-relativístico com acelerações muito menores do que  $a_0$  conduz ao MOND, enquanto no seu limite não-relativístico com grandes acelerações em relação a  $a_0$ , a dinâmica Newtoniana é recuperada. A teoria possui três constantes importantes:  $l$  com dimensão de comprimento, e mais duas positivas e adimensionais,  $k$  e  $K$ .

Os pontos fortes do modelo são:

- A) o TeVeS passa pelos testes usuais do sistema solar,
- B) prediz o desvio da luz de acordo com o observado sem requerer a presença da matéria escura em volta da galáxia,
- C) não exhibe propagação superluminal e,
- D) fornece um formalismo específico para a construção de modelos cosmológicos.

O TeVeS é baseado em quatro campos gravitacionais, sendo um tensorial, um vetorial e dois escalares descritos como segue,

- 1) a métrica de Einstein  $g_{\mu\nu}$ , bem como sua inversa  $g^{\mu\nu}$ .
- 2) um campo quadrivetor tipo tempo  $U_\mu$  sujeito à condição:

$$g^{\alpha\beta}U_\alpha U_\beta = -1. \quad (20)$$

- 3) um campo escalar dinâmico  $\phi$  adimensional.

- 4) e, finalmente, um campo escalar não dinâmico  $\sigma$  com dimensão igual à de  $(1/G^{1/2})$ .

A métrica física do TeVeS está relacionada à métrica de Einstein através de uma transformação disforme,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + U_\alpha U_\beta) - e^{2\phi}U_\alpha U_\beta. \quad (21)$$

### VI. TEORIAS COM TRANSFORMAÇÃO DISFORME

A fim de resolver o problema do desvio da luz foi sugerido substituir a transformação conforme,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\psi}g_{\alpha\beta}, \quad (22)$$

pela disforme,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\psi}(Ag_{\alpha\beta} + BL^2\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}). \quad (23)$$

onde  $A, B$  são funções do invariante  $g^{\mu\nu}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu}$ , e  $L$  é uma constante.

Neste caso a direção do espaço tempo colinear com  $\psi_{,\alpha}$  é comprimida diferentemente nas quatro direções, por isso, a forma da métrica é distorcida. No entanto, foi visto que se insistirmos na propagação causal, que consiste na velocidade da luz ser maior do que a das ondas gravitacionais (perturbação da métrica  $g_{\alpha\beta}$ ), o sinal requerido para  $B$  deve ser o oposto do desejado para aumentar o desvio da luz. Para que o desvio da luz aumente,  $B$  deve ser positivo [7], porém surge o problema de causalidade, que para ser evitado exige um  $B$  negativo [7].

Uma maneira de sair do impasse consiste em trocar os termos  $\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}$  por  $U_\alpha U_\beta$  na Eq. (23), onde  $U_\alpha$  é um quadrivetor constante que aponta para o tempo [7].

A introdução do campo vetorial  $U^\alpha$  faz o truque [7]: o MOND é recuperado e o desvio da luz é aumentado para as corretas proporções mesmo para um  $B$  negativo [7] evitando os problemas de causalidade [1]. Esta nova transformação disforme é responsável pelo desvio extra da luz, em acordo com as observações, sem invocar a presença de matéria escura ao

contrário das teorias predecessoras que falharam neste intuito.

A métrica física da teoria estratificada de Sanders tem a forma,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{-2\psi} g_{\alpha\beta} - 2U_\alpha U_\beta \sinh(2\psi). \quad (24)$$

Esta teoria de gravitação estratificada se comporta bem quando confrontada com testes do sistema solar. Todavia, a teoria precisa de um referencial prioritário [1, 5, 7], então ela pode ser covariante enquanto que uma teoria aceitável necessita ser covariante.

## A. Fundamentos do TeVeS

### A) Ações

Nesta teoria existem 4 ações que serão discutidas. A primeira é devido a parte geométrica e é idêntica à ação da relatividade geral:

$$S_g = (16\pi G)^{-1} \int g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-g)^{1/2} d^4x. \quad (25)$$

O termo  $g$  é o determinante de  $g_{\alpha\beta}$  que é a métrica no referencial de Einstein.

A segunda ação é devida aos campos escalares,

$$S_s = -\frac{1}{2} \int \left[ \sigma^2 h^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + \frac{1}{2} G l^{-2} \sigma^4 F(kG\sigma^2) \right] (-g)^{1/2} d^4x, \quad (26)$$

onde o termo

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta,$$

é introduzido para eliminar a propagação superluminal do campo  $\phi$  [1, 7] devida a presença do campo vetorial [1], sob a condição  $\phi > 0$ .  $F$  é uma função adimensional livre [1].

Além do mais, dois parâmetros constantes são introduzidos:  $k$  que não tem dimensão, e  $l$  que tem dimensão de comprimento.

O termo  $\sigma^2 U^\alpha U^\beta \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}$  foi incluído na ação escalar para impedir a propagação superluminal do campo  $\phi$  [1]. A propagação superluminal era um dos grandes problemas que assolava o RAQUAL.

A terceira ação está ligada ao campo vetorial  $U^\alpha$ :

$$S_v = -\frac{K}{32\pi G} \int \left[ g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} U_{[\alpha,\mu]} U_{[\beta,\mu]} - \left(\frac{2\lambda}{K}\right) \times (g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu + 1) \right] (-g)^{1/2} d^4x. \quad (27)$$

O par de índices entre colchetes é devido a antissimetrização,

$$U_{[\alpha,\mu]} = U_{\alpha;\mu} - U_{\mu;\alpha}. \quad (28)$$

O novo parâmetro  $K$  introduzido é uma constante de acoplamento adimensional desde que  $U^\alpha$  também seja adimensional.  $\lambda$  é um multiplicador de Lagrange dependente do espaço-tempo para forçar a normalização [7] do campo  $U^\alpha$ , e que é determinada assim que as equações são resolvidas. A variação em  $\lambda$  dá justamente a relação  $g^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = -1$  mencionada anteriormente. Resumindo:

- $F$  = função sem dimensão,
- $\phi$  = campo escalar dinâmico sem dimensão,
- $\sigma^2$  = campo escalar não dinâmico com dimensão do inverso da constante gravitacional newtoniana,
- $U^\alpha$  = campo vetorial sem dimensão,
- $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange que depende do espaço-tempo,
- $k$  = constante sem dimensão,
- $K$  = constante de acoplamento sem dimensão,
- $l$  = constante com dimensão de comprimento.

A quarta e última ação é a da matéria:

$$S_m = \int L(\tilde{g}_{\mu\nu}) (-\tilde{g})^{1/2} d^4x. \quad (29)$$

É importante conhecer a relação entre  $\tilde{g}$  (determinante de  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ ) e  $g$  (determinante de  $g_{\alpha\beta}$ ).

Para isto multiplicamos a métrica física pela de Einstein,

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} &= [e^{2\phi}g^{\mu\nu} + 2g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}U_\alpha U_\beta \sinh(2\phi)]g_{\nu\mu} \\ &= \delta_\alpha^\mu e^{2\phi} + 2U^\mu U_\alpha \left(\frac{e^{2\phi} - e^{-2\phi}}{2}\right) \\ &= e^{2\phi}[\delta_\alpha^\mu + U^\mu U_\alpha(1 - e^{-4\phi})],\end{aligned}\quad (30)$$

então como  $U^\alpha$  só tem componente temporal, a relação do determinante de  $\tilde{g}$  e  $g$  é

$$\tilde{g}^{-1}g = \det[e^{2\phi}I + e^{2\phi}U^0U_0(1 - e^{-4\phi})], \quad (31)$$

onde  $I$  é a matriz unitária. Após algumas manipulações encontramos,

$$\sqrt{-\tilde{g}} = e^{-2\phi} \sqrt{-g}. \quad (32)$$

### B1) EQUACÃO DE EINSTEIN MODIFICADA

Para se encontrar a equação de Einstein modificada no referencial de Einstein deve-se fazer a variação em  $g^{\alpha\beta}$ . O resultado final é:

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta} &= 8\pi G \left[ \tilde{T}_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-4\phi})U^\mu \tilde{T}_{\mu(\alpha} U_{\beta)} \right] + \theta_{\alpha\beta},\end{aligned}\quad (33)$$

onde

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta} &\equiv \sigma^2 \left[ \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. - U^\mu\phi_{,\mu} \left( U_{(\alpha}\phi_{,\beta)} - \frac{1}{2}U^\nu\phi_{,\nu}g_{\alpha\beta} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4}Gl^{-2}\sigma^4 F(kG\sigma^2)g_{\alpha\beta},\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha\beta} &\equiv K \left( g^{\mu\nu}U_{[\mu,\beta]}U_{\nu,\alpha]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}g^{\sigma\tau}g^{\mu\nu}U_{[\sigma,\mu]}U_{[\tau,\nu]}g_{\alpha\beta} \right) - \lambda U_\alpha U_\beta.\end{aligned}\quad (35)$$

### B2) EQUACÃO DO CAMPO ESCALAR $\sigma$

A equação de  $\sigma$  pode ser escrita de forma mais compacta e prática a partir de uma redefinição de variável como é feito abaixo:

$$-\mu F(\mu) - \frac{1}{2}\mu^2 F'(\mu) = y, \quad (36)$$

com a identidade

$$\mu = kG\sigma^2, \quad (37)$$

e  $\mu = \mu(kl^2 h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta})$ . O termo  $h^{\alpha\beta}$  é definido por,

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta. \quad (38)$$

Finalmente, a variável  $y$  é,

$$y = kl^2 h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}. \quad (39)$$

### B3 - EQUACÃO DO CAMPO ESCALAR $\phi$

A partir deste campo escalar alcançamos

$$\begin{aligned}\left[ \mu h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha} \right]_{;\beta} \\ = kG \left[ g^{\alpha\beta} + (1 + e^{-4\phi})u^\alpha U^\beta \right] \tilde{T}_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (40)$$

O tensor momento energia é dado por [1]

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\rho}\tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta + \tilde{p}(\tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta), \quad (41)$$

onde  $\tilde{\rho}$  é a densidade de energia própria,  $\tilde{p}$  é a pressão, e  $\tilde{u}_\alpha$  é a quadrivelocidade [1]. A teoria também prevê a relação abaixo

$$\tilde{u}_\alpha = e^\phi U_\alpha. \quad (42)$$

Usando (42) e (41) surge a relação:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\alpha\beta} &= \tilde{\rho} \left( e^\phi U_\alpha \right) \left( e^\phi U_\beta \right) \\ &\quad + \tilde{p}e^{-2\phi} (g_{\alpha\beta} + U_\alpha U_\beta).\end{aligned}\quad (43)$$

Unindo a condição (40) e (41) encontra-se:

$$\begin{aligned}\left[ \mu h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha} \right]_{;\beta} &= kG \left[ g^{\alpha\beta} + (1 + e^{-4\phi})u^\alpha U^\beta \right] \times \\ &\quad \times [\tilde{\rho}\tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta + \tilde{p}(\tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta)].\end{aligned}\quad (44)$$

Por (42), de  $g^{\alpha\beta}U_\alpha U_\beta = -1$  e (44), a equação do campo  $\phi$  (40) é reescrita na forma,

$$\left[ \mu h^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha} \right]_{;\beta} = kG [\tilde{\rho} + 3\tilde{p}] e^{-2\phi}. \quad (45)$$

Esta equação é de uso tanto para sistemas quase estáticos quanto para cosmologia [1].

#### B4) EQUAÇÃO DO CAMPO VETORIAL $U_\alpha$

Fazendo a variação em  $U_\alpha$  surge a equação

$$\begin{aligned} KU_{;\beta}^{[\alpha;\beta]} + \lambda U^\alpha + 8\pi G \sigma^2 U^\beta \phi_{,\beta} g^{\alpha\gamma} \phi_{,\gamma} \\ = 8\pi G (1 - e^{-4\phi}) g^{\alpha\mu} U^\beta \tilde{T}_{\mu\beta}. \end{aligned} \quad (46)$$

$\lambda$  é o multiplicador de Lagrange e é determinado assim que as equações são resolvidas [7].

Uma das razões para acreditar que o TeVeS é uma teoria consistente, é mostrando que em pequenas escalas como a do sistema solar, ela se comporta da mesma maneira que a relatividade geral. A teoria possui três parâmetros:  $k$ ,  $l$  e  $K$ , e no limite em que  $k \mapsto 0$ ,  $l \propto k^{-3/2}$ ,  $K \propto k$  e  $l \mapsto \infty$  a teoria se funde naturalmente à relatividade geral para qualquer forma de  $F$  desde que se faça uma troca de variáveis  $\phi \mapsto \phi_* \equiv l\phi$ ,  $\sigma \mapsto \sigma_* \equiv \sqrt{k}\sigma$ . Assim, quando  $l \mapsto \infty$ , a ação escalar desaparece e  $\phi_*$  desacopla da teoria [1]. Quando  $K \mapsto 0$  a ação vetorial  $S_v$  desaparece, e também  $\lambda \mapsto 0$  [1, 5]. Então a equação de Einstein modificada se reduz na relatividade geral [1], e a métrica física se torna idêntica à métrica de Einstein [1, 5].

#### B. Referencial de Einstein e Jordan

No referencial de Einstein o campo escalar interage explicitamente com a matéria [1], e as trajetórias das partículas não são geodésica da métrica de Einstein. Também a constante gravitacional  $G$  permanece constante [8], enquanto que as massas das partículas variam. O tensor momento energia da matéria não necessariamente se conserva, e é o tensor momento energia efetivo que se conserva:  $G_{;\beta}^{\alpha\beta} = 8\pi GT_{;\beta}^{ef\alpha\beta} = 0$ . É neste referencial que o TeVeS foi formulado.

De forma alternativa a ação é descrita no referencial de Jordan no qual a interação escalar é absorvida pela transformação conforme da métrica, e as trajetórias das partículas são geodésicas da nova métrica. Neste referencial os campos não interagem com a matéria, e o tensor momento energia da matéria sempre se conserva:  $T_{m;\beta}^{\alpha\beta} = 0$  [8]. Aqui o campo escalar acopla à gravidade [1]. Também a

‘constante gravitacional’ não é constante e, portanto, varia, enquanto que as massas das partículas são constantes [8]. Segundo a referência [9], a equivalência matemática entre os dois referencias não implica necessariamente em equivalência física.

Uma teoria relativística pode ser descrita de duas maneiras diferentes. Uma usando o referencial de Jordan e outra usando o referencial de Einstein. Segundo [1–3] o referencial de Jordan é aquele cujas grandezas possuem significado físico e não matemático. Desta maneira, a métrica pode ser escrita tanto em um referencial quanto em outro.

A relação entre a métrica no referencial de Jordan  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$  e a de Einstein  $g_{\alpha\beta}$  é feita através de uma relação que é denominada transformação conforme. Nesta transformação, as duas métricas estão ligadas por uma função do campo escalar  $\phi$ :

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}. \quad (47)$$

Isto significa que o espaço-tempo foi localmente esticado isotropicamente em todas direções com respeito a  $g_{\alpha\beta}$ . A trajetória da partícula é geodésica quando escrita na métrica de Jordan e não-geodésica quando escrita na métrica de Einstein. O observável é justamente a métrica de Jordan [3, 7], isto é, aquela usada para fazer medições a partir de relógios e réguas.

Se  $\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ , vale o princípio de equivalência forte. Porém, não há experimento que verifique tal igualdade, e o princípio de equivalência forte só tem algum suporte ao nível do sistema solar. A grandes distâncias, a validade do princípio de equivalência forte é questionável. Para a relatividade geral tanto o princípio de equivalência fraco como o forte é satisfeito, porém somente o princípio de equivalência fraco é que é sustentado por muitos experimentos. Estes experimentos são evidentes somente para  $\tilde{g}_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}$  como acontece em largas escalas.

#### C. Equações Cosmológicas do TeVeS

Vamos reescrever as equações de campo e de Einstein modificada para o caso cosmológico,

na qual as variáveis dependem do tempo, mas não das coordenadas espaciais já que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escalas. Neste caso, o campo vetorial é,

$$U^\alpha = \delta_t^\alpha. \quad (48)$$

A métrica usada é a de Robertson-Walker, pois o universo é homogêneo e isotrópico,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= -dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Esta é a métrica no referencial de Einstein. Por outro lado, observando que

$$g_{\alpha\beta}^\sim = e^{-2\phi} g_{\alpha\beta} - 2U_\alpha U_\beta \sinh(2\phi), \quad (50)$$

podemos calcular a métrica física, ou seja, aquela formada por grandezas que realmente podemos medir. Como  $U^\alpha = \delta_t^\alpha$ , então pela relação (50) temos:

$$g_{00}^\sim = -e^{2\phi}, \quad (51)$$

$$g_{ii}^\sim = a^2 e^{-2\phi}. \quad (52)$$

A partir de (51) e (52) a métrica física toma a forma,

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \tilde{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -(e^\phi dt)^2 \\ &+ (e^{-\phi} a(t))^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \\ &= -d\tilde{t}^2 + \tilde{a}(\tilde{t})^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \end{aligned} \quad (53)$$

Portanto, por (51), (52) e (53) surgem as importantes relações

$$d\tilde{t} = e^\phi dt, \quad \tilde{a}(\tilde{t}) = e^{-\phi} a(t). \quad (54)$$

Embora estejamos trabalhando no referencial de Einstein e utilizando as variáveis  $a$  e  $t$ , elas não possuem nenhum significado físico [2]. O próximo passo consiste em encontrar as equações cosmológicas. Ao multiplicar (41) por  $U^\alpha$  resulta,

$$\begin{aligned} U^\alpha \tilde{T}_{\alpha\beta} &= \tilde{\rho} U^\beta \tilde{u}_\beta \tilde{u}_\alpha + \tilde{p} e^{-2\phi} [g_{\alpha\beta} U^\beta \\ &+ U^\beta U_\beta U_\alpha]. \end{aligned} \quad (55)$$

Utilizando a relação  $g^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = -1$ , a equação acima pode ser escrita como,

$$U^\beta \tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{\rho} U^\beta (e^\phi U_\beta) \tilde{u}_\alpha. \quad (56)$$

E uma vez que  $\tilde{u}_\beta = e^\phi U_\beta$  [1], então,

$$U^\beta \tilde{T}_{\alpha\beta} = -\tilde{\rho} e^{2\phi} U_\alpha. \quad (57)$$

Ao unir (57) com (46) e adotar  $U^\alpha = \delta_t^\alpha$  alcançamos a equação cosmológica geral do campo vetorial  $U^\alpha$ ,

$$\lambda = 8\pi G [\sigma^2 \dot{\phi}^2 - 2\tilde{\rho} \sinh(2\phi)]. \quad (58)$$

A partir de (33) e usando (58) para eliminar  $\lambda$ , encontramos a equação de Einstein modificada para a componente temporal:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho} e^{-2\phi} + \frac{8\pi G}{3} \sigma^2 \dot{\phi}^2 + \frac{2\pi}{3} \frac{\mu^2 F(\mu)}{k^2 l^2}, \quad (59)$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \tilde{\rho} e^{-2\phi}}{3} + \frac{4\pi}{3k^2 l^2} \left[ -y\mu + \frac{\mu^2 F(\mu)}{2} \right]. \quad (60)$$

Para a componente espacial temos:

$$\begin{aligned} 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi G \left[ -\tilde{p} e^{-2\phi} - \dot{\phi}^2 \sigma^2 \right. \\ &\left. + \frac{G\sigma^4 F(kG\sigma^2)}{4l^2} \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Por (36) encontramos a equação cosmológica do campo escalar  $\sigma$ , onde  $\mu = kG\sigma^2$ :

$$2kl^2 \dot{\phi}^2 = \mu F(\mu) + \frac{1}{2} \mu^2 F'(\mu). \quad (62)$$

Por último (40) fornece a equação cosmológica do campo  $\phi$ :

$$\dot{\mu} \dot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a} \mu \dot{\phi} + \mu \ddot{\phi} = -\frac{kG e^{-2\phi}}{2} [\tilde{\rho} + 3\tilde{p}]. \quad (63)$$

A Eq. (59) pode ser reescrita com o auxílio de  $\mu = kG\sigma^2$  e se torna

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G \left[ \tilde{\rho} e^{-2\phi} + \frac{\mu}{kG} \dot{\phi}^2 + \frac{\mu^2 F(\mu)}{4Gk^2 l^2} \right], \quad (64)$$

onde a densidade de energia efetiva é,

$$\rho_{ef} = \tilde{\rho}e^{-2\phi} + \frac{\mu}{kG}\dot{\phi}^2 + \frac{\mu^2 F(\mu)}{4Gk^2l^2}, \quad (65)$$

que leva à equação,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{ef}. \quad (66)$$

A componente espacial da equação de Einstein modificada (61) pode ser reescrita:

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G \left[ \tilde{\rho}e^{-2\phi} + \frac{\dot{\phi}^2\mu}{kG} - \frac{\mu^2 F(\mu)}{4l^2k^2G} \right]. \quad (67)$$

Portanto, para a pressão efetiva conseguimos,

$$p_{ef} = \tilde{p} \exp[-2\phi] + \frac{\mu}{kG}\dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{4k^2l^2G} F(\mu). \quad (68)$$

Assim, (67) em (68) nos leva a

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G p_{ef}. \quad (69)$$

Das equações (43) e (48) obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{00} &= \tilde{\rho}(e^\phi U_0)(e^\phi U_0) + \tilde{p}e^{-2\phi}(g_{00} + U_0 U_0) \\ &= \tilde{\rho}e^{2\phi}, \end{aligned} \quad (70)$$

ou ainda, reorganizando,

$$\tilde{T}_{00} = \rho_m = \tilde{\rho}e^{2\phi}. \quad (71)$$

Da mesma forma para a componente espacial do tensor momento energia da matéria surge

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{xx} &= \tilde{\rho}(e^\phi U_x)(e^\phi U_x) + \tilde{p}e^{-2\phi}(g_{xx} + U_x U_x) \\ &= \tilde{p}e^{-2\phi}a^2. \end{aligned} \quad (72)$$

Dessa forma, conseguimos,

$$p_m = \tilde{p}e^{-2\phi}. \quad (73)$$

Uma vez que,

$$\rho_{ef} = \rho_m + \rho_\phi, \quad (74)$$

logo, resulta,

$$\rho_\phi = \rho_{ef} - \rho_m. \quad (75)$$

Pelas equações (75) e (71) conseguimos a densidade de energia do campo escalar,

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \tilde{\rho} [\exp[-2\phi] - \exp[2\phi]] + \frac{\mu}{kG}\dot{\phi}^2 \\ &+ \frac{\mu^2}{4k^2l^2G} F(\mu). \end{aligned} \quad (76)$$

De forma equivalente para a pressão, temos

$$p_{ef} = p_m + p_\phi. \quad (77)$$

Da Eq. (68) segue a componente pressão

$$p_\phi = \frac{\mu}{kG}\dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{4k^2l^2G} F(\mu). \quad (78)$$

As relações entre pressão e densidade de energia são dadas por:

$$\tilde{p} = w\tilde{\rho}, \quad (79)$$

$$p_m = w_m \rho_m, \quad (80)$$

com,

$$w_m = w e^{-4\phi}, \quad (81)$$

é dado por (71) e (73). Para o campo escalar, o parâmetro da sua equação de estado é,

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}. \quad (82)$$

### Conservação da Energia dentro da Cosmologia

Uma importante relação é [2]:

$$\dot{\tilde{\rho}} = 3 \left( \dot{\phi} - \frac{\dot{a}}{a} \right) (\tilde{\rho} + \tilde{p}). \quad (83)$$

Por (54) derivada do fator de escala físico pelo tempo físico

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = e^{-2\phi} \left( -\frac{d\phi}{dt} a + \frac{da}{dt} \right), \quad (84)$$

que ao ser dividido por  $\tilde{a}(\tilde{t})$  dá origem a

$$\tilde{H} = e^{-\phi} \left( -\frac{d\phi}{dt} + H \right). \quad (85)$$

A partir de (83), (54) e (85) surge a equação da conservação da energia no referencial físico

da componente matéria:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} = -3\tilde{H}(\tilde{\rho} + \tilde{p}). \quad (86)$$

É neste referencial que as variáveis podem ser medidas por meio de relógios e réguas [1]. Por outro lado, no referencial de Einstein,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w_m)\rho_m &= 5\dot{\phi}\rho_m \\ - 3w \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} - \dot{\phi} \right) - \exp[-4\phi]\frac{\dot{a}}{a} \right] \rho_m, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\phi + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\phi + p_\phi) &= -5\dot{\phi}\rho_m \\ + 3w \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} - \dot{\phi} \right) - \exp[-4\phi]\frac{\dot{a}}{a} \right] \rho_m. \end{aligned} \quad (88)$$

Unindo as duas equações acima, surge a importante relação:

$$\dot{\rho}_{ef} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_{ef} + p_{ef}) = 0. \quad (89)$$

Ainda que a relação (74) seja fisicamente bem motivada desde que  $\rho_m$  coincida com a componente 00 do tensor momento energia da matéria, não parece que exista uma maneira óbvia de manusear os resultados dinâmicos. Concluindo, por (87) e (88) percebe-se imediatamente que no referencial de Einstein o tensor momento energia da matéria não se conserva individualmente como ocorre no referencial físico, isto é, no referencial de Einstein é o tensor momento energia efetivo  $\tilde{T}_{ef}^{\alpha\beta}$  que se conserva, em pleno acordo com a expressão (89).

## VII. DISCUSSÕES

A proposta do TeVeS por Bekenstein teve como objetivo encontrar uma maneira de uma teoria relativística se reduzir ao MOND no li-

mite de baixas acelerações sem ter que admitir a existência de matéria escura. Este objetivo foi parcialmente atingido, visto que em aglomerado de galáxias o modelo não é capaz de sobreviver sem ter que adicionar um pouco de matéria escura, no entanto as curvas planas de rotação de galáxias são descritas com grande perfeição e precisão seguindo a filosofia do MOND. Além do mais, o modelo faz previsões coerentes ao nível de sistema solar, prevê o desvio da luz corretamente pela galáxia levando em conta apenas matéria luminosa, não exibe propagação superluminal e fornece um formalismo competitivo para desenvolvimento de modelos cosmológicos.

Apesar do TeVeS ser a melhor opção quando se leva em conta apenas matéria luminosa, o postulado da existência de matéria escura continua ainda sendo o caminho padrão para explicar as lentes gravitacionais e as curvas planas de rotação de galáxias. Postulada inicialmente na década de 1930, e depois retomada de maneira mais séria na década de 1970, é suposto que sua quantidade no universo seja de aproximadamente 5 vezes a quantidade de matéria bariônica. O modelo é didático, mas quem seria ela? Onde ela está? Os MACHO (Massive Compact Halo Object) compreenderiam objetos celestes que emitem luz de difícil detecção como estrelas de neutrons ou buracos negros? Os WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles) seriam uma segunda possibilidade. Os áxions, fotinos, axinos, gravitinos etc., continuam a fornecer uma lista de possíveis candidatos que precisam estar associados a modelos teóricos de física de partícula.

Portanto, tanto o TeVeS quanto o postulado da matéria escura representam um desafio do ponto de vista teórico, a diferença é que o TeVeS já é o modelo teórico, e o postulado da matéria escura surge primeiro para depois ser associado a modelos teóricos.

[1] J.D. Bekenstein. Phys. Rev. D **70**, 083509 (2004).

[2] L.M. Diaz-Rivera, L. Samushia, e B. Ratra. Phys. Rev. D **73**, 083503 (2006).

- [3] J.D. Bekenstein. *Comtemp. Phys.* **47**, 387(2006). [arXiv:astro-ph/0701848].
- [4] F. Zwicky, *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*. *Helvetica Physica Acta* **6**, 110127 (1933).
- [5] J.D. Bekenstein. *Proc. Sci* **Po5**, 012 (JHW2004). [arXiv:astro-ph/0412652].
- [6] Dark-matter heretic [archive]. Interview of Physicist Mordehai Milgrom. *American Scientist* **91**, (1) 1 (2003).
- [7] J.B. Bekenstein. *EAS Plub. Series Publication* **20**, (2009).
- [8] V. Faraoni, S. Nadeau. *Phys. Rev. D* **75**, 023501 (2007). [arXiv: gr-qc/0612075].
- [9] S. Capozziello, S. Nojiri, S.D. Odintsov, A. Troisi. *Phys. Lett. B* **639**, 135 (2006). [arXiv: astro-ph/0604431].
- [10] F.N. Lobo. [arXiv:gr-qc/0807.1640v1].
- [11] C. Brans, R.H. Dicke. *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
- [12] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. New Jersey: WSE Wiley (1972).
- [13] T.P. Sotiriou, V. Faraoni. [arXiv:gr-qc/0805.1726].
- [14] N. Agarwal, R. Bean. *Class. Quant. Grav.* **25**, 165001 (2008). [arXiv:gr-qc/0708.3967].
- [15] T. P. Sotiriou. [arXiv:gr-qc/0810.5594v1].
- [16] T. Chiba. *Phys. Lett. B* **575**, 1 (2003).
- [17] T. Matos, L.A. Urena-Lopez. *J. Mod. Phys. D* **13**, 2287 (2004). [arXiv:astro-ph/0406194].
- [18] M. Roshan, F. Shojai. *Phys. Rev. D* **80**, 043508 (2009).
- [19] J. Khoury, A. Weltman. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 171104 (2004).
- [20] J. Khoury, A. Weltman. *Phys. Rev. D* **69**, 044026 (2004).
- [21] C.E.M. Batista, W. Zimdahl, *Power-law solutions for TeVeS*. *Classical and Quantum Gravity* **27**, 105012 (2010).
- [22] C.E.M. Batista, W. Zimdahl, *Power-law solutions and accelerated expansion in scalar-tensor theories*. *Phys. Rev. D* **82**, 023527 (2010).
- [23] W. Hu, I. Sawicki. *Phys. Rev. D* **76**, 064004 (2007).
- [24] C.E.M. Batista, *Modelos de matéria e energia escuras alternativos ao cenário padrão*. Tese (Doutorado) – Departamento de Física e Química da UFES, Vitória (2010).
- [25] D.A. Kirznits, *Weinberg Model and the Hot universe*. *JETP Lett.* **15**, 745 (1972).
- [26] R. Gregory. *Phys. Lett. B* **215**, 663 (1988).
- [27] A.A. Starobinsky. *JETP Lett.* **86**, 157 (2007).
- [28] P.W. Higgs. *Phys. Lett.* **12**, 132 (1964).
- [29] S. Nojiri, S.D. Odintsov. *Phys. Lett. B* **657**, 238 (2007).
- [30] A.D. Linde, *Phase transitions in gauge theories and cosmology*. *Rep. Prog. Phys.* **42**, 389 (1979).
- [31] L. Amendola, D. Polarski, S. Tsujikawa. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 131302 (2007). [arXiv:astro-ph/0603703].
- [32] L. Amendola, D. Polarski, S. Tsujikawa. *Int. J. Mod. Phys. D* **16**, 1555 (2007). [arXiv:astro-ph/0605384].
- [33] M. Sami. *Lect. Notes Phys.* **72**, 219 (2007).
- [34] C.E.M. Batista, W. Zimdahl. *Class. Quant. Grav.* **27**, 105012 (2010).
- [35] V. Folomeev *et al.*. *Gravitation and Cosmology* **12**, (2-3) 163 (2006).
- [36] J.A. Helayël-Neto *et al.*, *Chern-Simons gravity with (curvature)<sup>2</sup> and (torsion)<sup>2</sup> terms and a basis of degree-of-freedom projection operators*. *Phys. Rev. D* **82**, 064014 (2010). doi:10.1103/PhysRevD.82.064014.