

## Algumas Propriedades dos Espaços $L^p$

### *Some Properties of $L^p$ Spaces*

N. C. Oliveira\*

*Departamento de Ciências Exatas – UEFS  
Campus Universitário, s/n, Km 03, BR 116  
Feira de Santana – BA – 44031-460*

B. R. B. Saavedra†

*Universidade do Vale do São Francisco  
Rodovia Juazeiro, Sobradinho s/n  
Juazeiro – BA – 48900-000*

Neste trabalho demonstramos algumas propriedades dos espaços  $L^p$ . As três primeiras servem para caracterizar casos patológicos ou muito singulares. A quarta propriedade fornece uma caracterização da norma para  $p$  tendendo ao infinito.

**Palavras-chave:** Espaços Métricos, Espaços  $L^p$ , Classes de Equivalência, Espaços Topológicos.

In this paper we demonstrate some properties of  $L^p$  spaces. The three first properties are valid for pathologic cases or very singular cases. The fourth property supplies a characterization for the norm when  $p$  tends to infinity.

**Keywords:** Metric Spaces,  $L^p$  Spaces, Equivalence Classes, Topological Spaces.

### I. INTRODUÇÃO

Os espaços vetoriais das funções  $f$ , cujas integrais  $\int_X |f|^p$  são mensuráveis, são denominados espaços  $L^p$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ . Estes espaços são estudados em cursos de Teoria da Medida e Análise Funcional. Contudo, algumas propriedades dos espaços  $L^p$  são tidas como de difícil demonstração. Neste trabalho procuramos desmistificar estes conceitos, através de demonstrações de algumas propriedades, de forma rigorosa, porém bastante simplificada.

Seja a terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , onde  $X$  é um subconjunto qualquer,  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra definida sobre  $X$  e  $\mu$  é uma medida de probabilidade definida sobre  $\mathcal{A}$  ( $\mu(X) = 1$ ). Diz-se que o conjunto  $A \in \mathcal{A}$  é um *átomo* se não existe  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $B \subsetneq A$  e  $\mu(B) \neq 0$ . Denotamos a coleção de todos os átomos por

$\mathcal{A}^*$ . Observamos que se os conjuntos  $A \neq B$  pertencem a  $\mathcal{A}^*$ , então  $A \cap B = \emptyset$ . Se o conjunto  $A \in \mathcal{A}$ , denotamos a função característica de  $A$  por  $\chi_A$ . Sejam os espaços normados

$$L^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p < \infty \right\},$$

com norma  $\|f\|_p = (\int_X |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ . Se  $A \subset X$  é um subconjunto mensurável, define-se  $L^p(A)$  analogamente. Para qualquer função mensurável  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos os seguintes conjuntos mensuráveis:

$$\begin{aligned} \{|f| < 1\} &:= \{x \in X : f(x) < 1\}, \\ \{|f| \geq 1\} &:= \{x \in X : f(x) \geq 1\}. \end{aligned}$$

\*Endereço Eletrônico: [neima@uefs.br](mailto:neima@uefs.br)

†Endereço Eletrônico: [saavedra@univasf.edu.br](mailto:saavedra@univasf.edu.br)

II. PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS  $L^p$

**Teorema 1.** Se  $0 < r < s \leq \infty$  então  $L^s(X) \subset L^r(X)$  com  $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ , se  $f \in L^s(X)$ .

**Demonstração.** Se  $s = \infty$ , é óbvio. No outro caso, observamos primeiro que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{s}{s-r}} = 1$ . Em segundo lugar, observamos que se  $f \in L^s(X)$ , então  $|f|^r \in L^{\frac{s}{s-r}}(X)$ . Logo, aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \|f\|_r^r &= \int_X |f|^r \leq \left( \int_X [|f|^r]^{\frac{s}{s-r}} \right)^{\frac{r}{s}} \cdot \left( \int_X 1 d\mu \right)^{\frac{s-r}{s}} \\ &= \|f\|_s^r, \text{ se } f \in L^s(X). \end{aligned}$$

Desta desigualdade supracitada concluímos a validade do Teorema 1 ■

**Teorema 2.** Sejam quaisquer números reais  $0 < r < s \leq \infty$ .

1. Se  $\mu(X - \bigcup_{A \in \mathcal{A}^*} A) = 0$ , então

$$L^r(X) = L^s(X) \Leftrightarrow \mathcal{A}^* \text{ é uma coleção finita;}$$

2. Se  $\mu(X - \bigcup_{A \in \mathcal{A}^*} A) > 0$ , então  $L^r(X) \neq L^s(X)$ .

**Demonstração.** Assumamos o primeiro caso:  $\mu(X - \bigcup_{A \in \mathcal{A}^*} A) = 0$ . Se  $\mathcal{A}^*$  é uma coleção finita então podemos escrever  $\mathcal{A}^* = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ . Por outro lado, como assumimos o primeiro caso, é suficiente analisar qualquer função mensurável sobre o subconjunto  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ . Seja qualquer função mensurável  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Afirmamos que, para cada  $A_i \in \mathcal{A}^*$ , existe uma constante real  $c_i > 0$  tal que  $|f|(x) = c_i$  para quase todo ponto  $x \in A_i$ . Caso contrário,  $A_i$  não seria um átomo. Portanto, para quase todo ponto  $x \in X$ , temos

$$|f|(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(x).$$

A partir daqui, pode-se concluir facilmente que  $L^r(X) = L^s(X)$ . Resta provar que se  $\mathcal{A}^*$  não é uma coleção finita, então  $L^r(X) \neq$

$L^s(X)$ . Para isto, é suficiente mostrar a existência de uma função mensurável  $f \in L^r(X) \setminus L^s(X)$ .

Como  $\mathcal{A}^*$  é uma coleção infinita de conjuntos, existe uma sub-coleção infinita enumerável  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}^*$ . Visto que  $0 < \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq 1$ , segue-se que o limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$ . Logo, podemos assumir

$$\mu(A_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

A função mensurável,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt[s]{\mu(A_n)}} \right] \chi_{A_n},$$

satisfaz nosso requerimento, porque, primeiro, observamos que  $f \notin L^s(X)$ , pois

$$\int_X |f|^s = 1 + 1 + \dots = +\infty,$$

e, segundo, observamos que  $f \in L^r(X)$ , pois

$$\int_X |f|^r = \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(A_n)]^{1-\frac{r}{s}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2^{1-\frac{r}{s}}} \right]^n < +\infty.$$

De modo que podemos terminar a demonstração do primeiro caso.

Enquanto ao segundo caso,  $\mu(X - \bigcup_{A \in \mathcal{A}^*} A) \neq 0$ , podemos afirmar que existe uma coleção infinita enumerável  $\mathcal{B} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$  tal que

1.  $\mu(A_i) \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}$ ,
2.  $A_i \cap A_j \neq \emptyset, \text{ se } i \neq j$ .

Ora, com a coleção  $\mathcal{B}$ , podemos definir uma função mensurável  $f \in L^r(X) \setminus L^s(X)$  como fizemos quando  $\mathcal{A}^*$  é uma coleção infinita.

Como conferimos a validade dos dois casos, podemos terminar a prova ■

**Teorema 3.** Se  $r < s \leq \infty$  e  $f \in L^r(X) \cap L^s(X)$ , então

$$\|f\|_r = \|f\|_s \Leftrightarrow |f| \text{ é constante.}$$

**Demonstração.** É sabido que um elemento  $f \in L^r(X)$  é uma classe de equivalência. Denota-se o número real  $\|f\|_r = \|f\|_s$  por  $\kappa$ . Verifica-se, facilmente, que se  $f$  é constante então  $\|f\|_r = \|f\|_s$ . Resta verificar a outra implicação. Para isto, se faz necessário analisar os três únicos casos dados a seguir. No primeiro caso, trivial,  $\kappa = 0$ , temos  $|f| = 0$ . No segundo caso,  $s = \infty$ , temos:

- a.  $|f(x)| \leq \kappa = \|f\|_\infty$ , para quase todo ponto  $x \in X$ , e
- b.  $\int_X (\kappa^r - |f(x)|^r) d\mu = 0$ .

Pelo item **a**, podemos dizer que a função mensurável  $\kappa^r - |f|^r$  é não negativa em quase todo ponto  $x \in X$ ; e, pelo item **b**, podemos escrever  $|f(x)| = \kappa$  para quase todo ponto  $x \in X$ , isto é,  $|f| = \kappa$ . No último caso,  $\kappa \neq 0$  e  $r < s < \infty$ , temos:

c. 
$$\int_X \left| \frac{f}{\kappa} \right|^s = 1 = \int_X \left| \frac{f}{\kappa} \right|^r .$$

Considerando este item **c**, obtém-se a seguinte igualdade:

$$\int_X \left| \frac{f}{\kappa} \right|^r = \frac{r}{s} \int_X \left| \frac{f}{\kappa} \right|^s + \frac{s-r}{s} \int_X 1 .$$

Esta igualdade implica

$$\int_X \left[ \left( \frac{r}{s} \right) \left| \frac{f}{\kappa} \right|^s + \left( \frac{s-r}{s} \right) - \left| \frac{f}{\kappa} \right|^r \right] = 0 . \tag{1}$$

Por outro lado, pela *desigualdade de Hölder*, para todo  $x \in X$ , temos

$$\begin{aligned} & \left( \frac{r}{s} \right) \left| \frac{f(x)}{\kappa} \right|^s + \left( \frac{s-r}{s} \right) \\ &= \left( \frac{r}{s} \right) \left| \frac{f(x)}{\kappa} \right|^{(\frac{s}{r}) \cdot r} + \left( \frac{s-r}{s} \right) \cdot (1)^{\frac{s}{s-r}} \\ &\geq (1) \cdot \left| \frac{f(x)}{\kappa} \right|^r = \left| \frac{f(x)}{\kappa} \right|^r . \end{aligned} \tag{2}$$

Pelas equações (1) e (2), para quase todo ponto  $x \in X$ , a seguinte igualdade é correta:

$$\left( \frac{r}{s} \right) \left| \frac{f(x)}{\kappa} \right|^s + \left( \frac{s-r}{s} \right) = \left| \frac{f(x)}{\kappa} \right|^r . \tag{3}$$

Por outro lado, fazendo  $\left| \frac{f(x)}{\kappa} \right|^s = e^t$ ,  $0 < \alpha = \frac{r}{s} < 1$  e substituindo em (3), obtemos

$$\alpha e^t + (1 - \alpha)e^0 = e^{\alpha t + (1-\alpha)0} . \tag{4}$$

Observando a condição de concavidade do gráfico da Função Exponencial e a Eq. (refn04), inferimos que  $t = 0$ , isto é, para quase todo ponto  $x \in X$  temos  $|f(x)| = \kappa$ . Logo,  $|f| = \kappa$ .

Como o último caso esta verificado, podemos concluir a demonstração ■

**Teorema 4.** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  uma função mensurável e  $\mu$  uma medida sobre  $X$  tal que  $\mu(X) = 1$ . Assumamos que  $\|f\|_r < \infty$ , para algum  $r > 0$ . Se definimos  $e^{-\infty} = 0$  então podemos escrever*

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p = e^{\int_X \log|f| d\mu} .$$

**Demonstração.** Seja a função mensurável  $g \in L^1(X)$  definida por

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)|^r, & \text{se } |f(x)| > 1; \\ 1, & \text{se } |f(x)| < 1. \end{cases}$$

Como  $|f|^p \leq g$ ,  $\forall 0 < p < r$ , poderemos aplicar o teorema de Convergência Dominada Lebesgue para obter

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_X |f|^p = \int_X \lim_{p \rightarrow 0} |f|^p = 1 . \tag{5}$$

A partir da Eq. (5) e do limite conhecido  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1} = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log \left( \int_X |f|^p \right)}{\left[ \int_X (|f|^p - 1) \right]} &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log \left( \int_X |f|^p \right)}{\left[ \int_X |f|^p \right] - 1} \\ &= 1 . \end{aligned} \tag{6}$$

Por outro lado, o Teorema 1 permite escrever

$$0 \leq \|f\|_{p'} \leq \|f\|_p \leq \|f\|_r < \infty, \text{ se } p' < p < r .$$

Logo, podemos dizer que existe  $\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p$ . Assim, para demonstrar o Teorema 4 resta

provar que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p = e^{\int_X \log|f| d\mu}. \quad (7)$$

Como  $\|f\|_p = e^{\frac{\log(\int_X |f|^p)}{p}}$ , mostrar (6) é equivalente a provar que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log(\int_X |f|^p)}{p} = \int_X \log|f| d\mu. \quad (8)$$

Para provar (7) dividiremos em dois casos. O primeiro caso é  $\log|f| \notin L^1(X)$ . Logo, como

$$\log(|f|) = \frac{1}{\frac{r}{2}} \log(|f|^{\frac{r}{2}}) \leq \frac{|f|^{\frac{r}{2}} - 1}{\frac{r}{2}} \in L^1(X),$$

temos

$$\log(|f|) \notin L^p(\{|f| < 1\}) \quad \text{e} \\ \log(|f|) \in L^p(\{|f| > 1\}).$$

O que demonstra esta propriedade. ■

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos editores e ao Prof. João Cardeal pela imprescindível ajuda.

- 
- [1] B.J. Fernandes, *Medida e Integração*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides – IMPA – CNPQ (1976).  
 [2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill Inc. (1981).  
 [3] C.S. Cardassi, *Geometria de Espaços de Banach e Novos Ideais Clássicos de Operadores*.

- In: Colóquio Brasileiro de Matemática, 16º, Ata, 1988. Rio de Janeiro: IMPA (1988).  
 [4] J. Diestel, J.J. Uhl Jr., *Vector Measures*. Mathematical Surveys (15). Providence: AMS (1977).