

# USANDO AS FUNÇÕES GAMA E BETA NA SOLUÇÃO EXATA DO PÊNDBULO SIMPLES

## USING GAMMA AND BETA FUNCTIONS IN THE EXACT SIMPLE PENDULUM SOLUTION

A. J. Mania<sup>1</sup>, E. Mania<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – DCET. [mania@uesc.br](mailto:mania@uesc.br)

<sup>2</sup>Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, Departamento de Física – DFIS. [emania@uefs.br](mailto:emania@uefs.br)

Embora um pêndulo seja algo simples de se construir e se observar, sua análise e exposição em bases teóricas quando não se considera a aproximação MHS, se tornam algo laborioso, de trato difícil, e sem muito material do assunto, exceto em periódicos científicos. Neste trabalho, pretendemos fornecer uma opção de desenvolvimento do cálculo exato do período de um pêndulo, mesmo em grandes amplitudes. O procedimento é feito com o uso das funções gama e beta, as quais estão regularmente inseridas em matérias teóricas de cursos de graduação de ciências exatas, como física e matemática.

**Palavras-chaves:** Pêndulo simples, integral elíptica, função gama, função beta.

Although a pendulum is something simple to build and observe, its analysis and exposure on theoretical bases when one does not consider the MHS approach, they become something laborious, difficult to deal with, and without much material of the subject, except in periodic journals. In this work, we intend to provide an option for developing the exact calculation of the period of a pendulum, even in large amplitudes. The procedure is done with the use of the Gamma and Beta functions which are regularly inserted in theoretical subjects of undergraduate courses in Physics and Mathematics.

**Keywords:** Simple pendulum, integral elliptical, gamma function, beta function

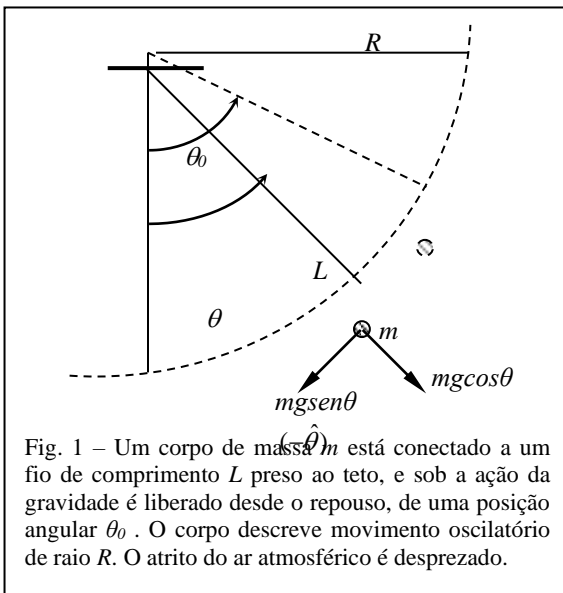
## 1. INTRODUÇÃO

A observação de um lustre a balançar na Catedral de Piza em 1583 instigou Galileu Galilei[1] (1564 – 1642) a testar o efeito do comprimento de arco varrido no tempo durante sua oscilação. Descobriu que o tempo que o pêndulo viaja em seu comprimento de arco e volta ao seu ponto de partida original era o mesmo, independentemente do próprio comprimento desse arco de varredura. Usando sua lei de queda dos corpos (planos inclinados) mediu o tempo requerido para a descida em linhas retas conectando as extremidades do movimento pendular notando serem constantes e não dependentes dos ângulos de inclinação. Entretanto, essa lei é correta somente para movimentos retilíneos, e não para movimento curvo que o pêndulo descreve. Para pequenos ângulos, a linha reta é quase idêntica ao arco de um círculo, tal que o período é constante para o círculo também. Galileu também provou, pela sua lei, que movimentos de queda ao longo de arcos são sempre mais rápido que movimentos em queda ao longo de linhas retas (cordas de arco), mas continuou a manter a consideração que o período de oscilação de um pêndulo é sempre constante.

Um fator que Galileu não considerou foi o atrito. Todos os seus experimentos foram realizados no ar. Esse atrito desacelerava o movimento na região mais rápida do pêndulo e levava a uma diminuição do comprimento de arco por onde passava. Como mediu um grande número de ciclos, os arcos de varredura iam diminuindo, e pensava que a lei também se aplicava a ângulos menores. O tempo requerido para o pêndulo

completar um arco de vinte graus seria idêntico ao tempo requerido para completar um arco de cinco graus. Notou também que o período do pêndulo não dependia do material do qual ele era construído, e nem de seu peso. O período era influenciado por seu comprimento apenas. Quanto mais longo o pêndulo, mais longo é o período.

Christiaan Huygens[2] (1629 – 1695) inventou o relógio de pêndulo em 1656 aproveitando os estudos de Galileu, que ele patenteou no ano seguinte. Além desta invenção, a sua investigação em relojoaria resultou em uma extensa análise do pêndulo no seu livro *Horologium Oscillatorium* de 1673, que é considerado como uma das obras mais importantes do Séc. XVII em Mecânica. Enquanto a primeira parte do livro contém descrições de projetos de relógios, a maior parte do livro é uma análise do movimento pendular e uma teoria sobre estudos das curvas.



Nosso estudo se inicia considerando um corpo de massa  $m$ , conectado a um fio de comprimento fixo  $L$ , e que está conectado ao teto, como mostra a Fig.1. Sob a ação da gravidade, o corpo é deslocado desde uma posição angular inicial  $\theta_0$ , largado e deixado a oscilar. Por usar a segunda Lei de Newton na direção tangencial de movimento, e considerando apenas o que acontece no primeiro quadrante,

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad \rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L} \sin \theta \quad [1]$$

Mudando para a variável angular:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{d\theta} \quad \rightarrow \\ d\omega^2 &= -2 \frac{g}{L} \sin \theta d\theta \quad [2] \end{aligned}$$

Integrando com a consideração que no tempo inicial a massa parte do repouso desde uma posição angular  $\theta_0$  ( $\omega_0 = 0$ ), se tem  $\omega^2 = 2 \frac{g}{L} (\cos \theta - \cos \theta_0)$ .

$$\text{E como } \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{d\theta}{\omega}; \quad \text{ou}$$

$$dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \quad [3]$$

$$\int_0^{T/4} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \quad [4]$$

Essa integral definida não pode ser resolvida analiticamente, e ela é uma integral imprópria pois possui uma assíntota vertical em  $\theta = \theta_0$ . O que se faz para contornar esta dificuldade é colocar o lado direito desta última equação na forma de uma integral elíptica. Se substituirmos direto a relação,

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} \quad \text{teremos algo como} \quad dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} - \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_0}}}, \text{ o que faz}$$

aparecer mais uma raíz.

$$\text{Para evitar isso, usamos então, a relação: } \cos \theta = \cos(\theta/2 + \theta/2) = \cos^2(\theta/2) - \text{sen}^2(\theta/2) = 1 - 2\text{sen}^2(\theta/2).$$

Neste caso,

$$dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - 2\text{sen}^2(\theta/2)) - (1 - \text{sen}^2(\theta/2))}} = \sqrt{\frac{L}{4g}} \frac{d\theta}{\text{sen}(\theta_0/2) \sqrt{\left(1 - \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{\text{sen}^2(\theta_0/2)}\right)}} \quad [5]$$

$$\text{Definindo agora, o parâmetro } k \equiv \text{sen}(\theta_0/2) \quad \text{e} \quad \text{sen} u \equiv \frac{\text{sen}(\theta/2)}{\text{sen}(\theta_0/2)}, \text{ temos que,}$$

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\theta}{2k \sqrt{1 - \text{sen}^2 u}}$$

$$\text{Também: } \frac{d(\text{sen} u)}{d\theta} = \cos u \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2k} \cos \theta/2 = \frac{1}{2k} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta/2} = \frac{1}{2k} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}$$

$$\text{Assim } d\theta = 2k \frac{\cos u \, du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} = 2k \frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 u}}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} du, \text{ que substituído na Eq. [5] para } dt, \text{ leva à,}$$

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{1}{2k \sqrt{1 - \text{sen}^2 u}} \frac{2k \sqrt{1 - \text{sen}^2 u}}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} du = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} \quad [6]$$

Para o nosso caso de interesse, adotamos as condições iniciais que em  $t = 0$ ,  $\theta = \theta_0 = \pi/2$ . Integrando desde  $u_0 = \theta_0 = \pi/2$  até  $\theta = 0$ , resulta em  $1/4$  do período de uma oscilação completa. Também, neste caso,  $\frac{d\theta}{dt} < 0$  (o ângulo de varredura está diminuindo e neste caso a aceleração é negativa).

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\pi/2}^0 \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} \quad [7]$$

Sendo esta a integral elíptica completa do primeiro tipo e está na forma apropriada a ser avaliada. Diferentes abordagens tratam de avaliar essa integral elíptica, veja comparações no final.

Num primeiro tratamento elementar do caso, a aproximação harmônica é usada se considerando pequenos ângulos de oscilação, o pêndulo é considerado varrer sua trajetória como um arco de círculo, e evita a integral elíptica, o período não depende da amplitude de oscilação. Esse comportamento uniforme, chamado de isocronismo, contrasta com o do pêndulo real, chamado de anisocronismo, para o qual o período cresce monotonicamente com a amplitude,

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad \rightarrow \quad \text{aproximação harmônica} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \rightarrow$$

*solução circular.*

[8]

Apesar dos problemas, a aproximação harmônica é largamente usada nos cursos introdutórios pela necessidade de se contornar as dificuldades matemáticas. Embora seja possível obter uma expressão analítica exata para o período do pêndulo simples usando apenas a conservação da energia mecânica, para um pêndulo real de amplitude qualquer, a expressão envolve uma função não-elementar do Cálculo, a integral elíptica completa do primeiro tipo, que na prática requer algum tipo de aproximação para ser avaliada[3].

## 2. METODOLOGIA

A forma básica da integral elíptica denominada de primeiro tipo é apresentada em uma forma referida como sendo uma integral incompleta, onde os limites do intervalo de representação da integral são  $0 \leq \sin \theta \leq 1$  ou  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

$$f(\sin \varphi, k) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad 0 \leq \sin \varphi \leq 1; \quad 0 \leq k^2 \leq 1 \quad [9]$$

Por colocar  $\gamma = \sin \theta$ , tem-se,

$$f(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}}, \quad 0 \leq \varphi < \pi/2; \quad 0 \leq k^2 < 1. \quad [10]$$

O parâmetro k é denominado de módulo da integral e  $\varphi$  é o ângulo de amplitude. A integral elíptica completa é conseguida por se colocar a amplitude em seu intervalo de limite superior máximo como  $\varphi = \pi/2$ , ou  $\sin \varphi = 1$ .

*O primeiro estudo relatado de integrais elípticas foi em 1655, quando John Wallis[4] (1616 – 1703) começou a estudar o comprimento do arco de uma elipse. Tanto John Wallis quanto Isaac Newton (1643-1727) publicaram uma expansão infinita da série para o comprimento do arco da elipse. Os interesses à época eram as órbitas planetárias. Wallis foi o matemático inglês de maior influência antes de Newton e contribuiu substancialmente às origens do cálculo. É também atribuído a ele a apresentação do símbolo  $\infty$  para infinito. Adrien Marie Legendre[5] (1752 – 1833) foi quem iniciou o uso de funções elípticas nos problemas de cálculos de um pêndulo simples e da deflexão de uma barra fina presa em uma de suas extremidades. Gastou mais de quarenta anos de sua vida trabalhando com essas funções, incluindo a classificação dos três tipos das integrais elípticas. Embora tenha se dedicado por quarenta anos ao assunto, os trabalhos de Legendre passaram despercebidos até 1817 quando dois jovens matemáticos colocaram o assunto em novas bases, revolucionando a teoria. Neils Henrik Abel foi o primeiro matemático a observar que as integrais elípticas podem ser invertidas em funções elípticas. Ele também reconheceu que, no caso complexo, tais funções são duplamente periódicas. Abel influenciou fortemente os matemáticos posteriores, em particular, Bernhard Riemann (1826 - 1866), que introduziria novas idéias ousadas na matemática, incluindo superfícies de Riemann. As introduziu a fim de obter um melhor controle sobre as funções elípticas, ao que hoje são conhecidas como funções abelianas, as generalizações das funções elípticas onde o denominador no integrando não é mais apenas uma raiz quadrada de um polinômio de grau 3 ou 4, mas de ordem superior.*

*Com a morte prematura de Abel, suas idéias foram continuadas e, depois aprimoradas por Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 – 1851) por volta de 1830, detalhando as integrais elípticas invertidas de primeira*

ordem. A construção de Jacobi se baseia na aplicação das funções theta, sendo similar à construção apresentada para as funções circulares (seno e cosseno).

$$\text{Avaliação da integral elíptica: } \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 u}} .$$

Da expansão da raiz,  $0 \leq x < 1$  :

$$\begin{aligned} (1-x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}(x) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(x)^2 - \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(x)^3 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{4!}(x)^4 - \\ &\quad - \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})}{5!}(x)^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \times n!} \times \frac{(-x)^n}{2^n \times 2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}x^5 + \dots = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{15}{48}x^3 + \frac{105}{384}x^4 + \frac{945}{3840}x^5 + \dots \end{aligned}$$

[11]

Usando a Eq. [11], se  $0 \leq k^2 < 1$  ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 u}} &= \int_0^{\pi/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2}k^2 \text{sen}^2 u + \frac{3}{8}(k^2 \text{sen}^2 u)^2 + \frac{15}{48}(k^2 \text{sen}^2 u)^3 + \frac{105}{384}(k^2 \text{sen}^2 u)^4 + \frac{945}{3840}(k^2 \text{sen}^2 u)^5 + \dots \right\} du \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!) \times n!} \times \frac{(k^2)^n}{2^n \times 2^n} \times \text{sen}^{2n} u \right] du = \int_0^{\pi/2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \times n! \times 2^n \times 2^n} \times (k \text{sen} u)^{2n} \right] du \end{aligned}$$

[12]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \times n! \times 2^n \times 2^n} \times \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n} u \, du \quad [13]$$

Pode-se integrar termo a termo com o uso de tabelas, se substituindo os limites, como é geralmente ensinado. Mas uma resolução mais elegante e simples é através do uso das funções *Gama* e *Beta*, que é a razão do preparo deste trabalho para o ensino alternativo de demonstrar na sua essência as dificuldades na resolução do problema do pêndulo.

$$\text{Função Gama: } \Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad \text{e} \quad \text{Função Beta: } B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad , \quad \text{para } m > 0$$

e  $n > 0$ . [14]

É fácil provar que  $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ . Seja  $z = x^2$  e  $dz = 2x dx$  ,

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} z^{m-1} e^{-z} dz = 2 \int_0^{\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx \quad \text{e} \quad \Gamma(n) = 2 \int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy \quad [15]$$

$$\Gamma(m) \Gamma(n) = 4 \left( \int_0^{\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy \right) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$\text{Fazendo } x = \rho \cos \phi \quad \text{e} \quad y = \rho \text{sen} \phi \quad \rightarrow \quad \Gamma(m) \Gamma(n) = 4 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{\infty} \rho^{2(m+n)-1} e^{-\rho^2} \cos^{2m-1} \phi \text{sen}^{2n-1} \phi \, d\rho d\phi$$

$$\Gamma(m) \Gamma(n) = \left( 2 \int_{\rho=0}^{\infty} \rho^{2(m+n)-1} e^{-\rho^2} d\rho \right) \left( 2 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos^{2m-1} \phi \operatorname{sen}^{2n-1} \phi d\phi \right) = \Gamma(m+n) \int_{\phi=0}^{\pi/2} 2 \cos^{2m-1} \phi \operatorname{sen}^{2n-1} \phi d\phi = \Gamma(m+n) B(n, m)$$

Como  $B(n, m) = B(m, n)$ , então

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{16}$$

Este resultado será muito útil como veremos a seguir. Também, seja  $x = \operatorname{sen}^2 \theta$

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 \theta)^{m-1} (\cos^2 \theta)^{n-1} 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$$

e seja  $\rho^2 = w \rightarrow 2\rho d\rho = dw \rightarrow d\rho = dw/2\rho$

$$\Gamma(m, n) = 2 \int_0^{\infty} \rho^{2(m+n)-1} e^{-\rho^2} d\rho = 2 \int_0^{\infty} w^{m+n} \frac{1}{\rho} e^{-w} \frac{dw}{2\rho} = \int_0^{\infty} w^{(m+n)-1} e^{-w} dw = \Gamma(m+n)$$

Tem-se então que  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{B(m, n)}{2}$ . Mas, como visto anteriormente:  $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

, resultando em

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}. \quad \text{Para } \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p \theta d\theta \quad \text{tem-se, fazendo: } p = 2m-1 \quad \text{e}$$

$$2n-1=0 \rightarrow n=1/2,$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p \theta d\theta = \frac{\Gamma[1/2(p+1)] \Gamma(1/2)}{2 \Gamma[1/2(p+2)]} \tag{17}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)! k^{2n}}{n! \times n! \times 2^n \times 2^n} \times \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} u du \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)! k^{2n}}{n! \times n! \times 2^n \times 2^n} \times \frac{\Gamma[1/2(2n+1)] \Gamma(1/2)}{2 \Gamma[1/2(2n+2)]} \right] \tag{18}$$

### 3. RESULTADOS

Resta agora avaliar as funções gamas para cada integral.

Usando as propriedades:  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ . Se  $n$  for inteiro e positivo,  $\Gamma(n+1) = n!$ ;  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,

e  $\Gamma(2) = 1! = 1$ .

Então,

$$\Gamma(3/2) = 1/2 \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2 \rightarrow \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 \theta d\theta = \frac{\Gamma[1/2(2+1)] \Gamma(1/2)}{2 \Gamma[1/2(2+2)]} = \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(1/2)}{2 \Gamma(2)} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\pi}}{2 \cdot 1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Gamma(5/2) = 3/2 \Gamma(3/2) = 3\sqrt{\pi}/4 \rightarrow \int_0^{\pi/2} \text{sen}^4 \theta d\theta = \frac{\Gamma[1/2(4+1)] \Gamma(1/2)}{2 \Gamma[1/2(4+2)]} = \frac{\Gamma(5/2) \Gamma(1/2)}{2 \Gamma(3)} = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\pi}}{2 \cdot 2} = \frac{3\pi}{16}$$

$$\Gamma(7/2) = 5/2 \Gamma(5/2) = 5/2 \cdot 3\sqrt{\pi}/4 = 15\sqrt{\pi}/8 \rightarrow \int_0^{\pi/2} \text{sen}^6 \theta d\theta = \frac{\Gamma[1/2(6+1)] \Gamma(1/2)}{2 \Gamma[1/2(6+2)]} = \frac{\Gamma(7/2) \Gamma(1/2)}{2 \Gamma(4)} = \frac{\frac{15\sqrt{\pi}}{8} \sqrt{\pi}}{2 \cdot 6} = \frac{15\pi}{96}$$

$$\Gamma(9/2) = 7/2 \Gamma(7/2) = 7/2 \cdot 15\sqrt{\pi}/8 = 105\sqrt{\pi}/16 \rightarrow \int_0^{\pi/2} \text{sen}^8 \theta d\theta = \frac{\Gamma[1/2(8+1)] \Gamma(1/2)}{2 \Gamma[1/2(8+2)]} = \frac{\Gamma(9/2) \Gamma(1/2)}{2 \Gamma(5)} = \frac{\frac{105\sqrt{\pi}}{16} \sqrt{\pi}}{2 \cdot 24} = \frac{105\pi}{768}$$

$$\Gamma(11/2) = 9/2 \Gamma(9/2) = 9/2 \cdot 105\sqrt{\pi}/16 = 945\sqrt{\pi}/32 \rightarrow \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{10} \theta d\theta = \frac{\Gamma[1/2(10+1)] \Gamma(1/2)}{2 \Gamma[1/2(10+2)]} = \frac{\Gamma(11/2) \Gamma(1/2)}{2 \Gamma(6)} = \frac{\frac{945\sqrt{\pi}}{32} \sqrt{\pi}}{2 \cdot 120} = \frac{945\pi}{7680}$$

[19]

Portanto,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 u}} = \int_0^{\pi/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} k^2 \text{sen}^2 u + \frac{1.3}{2.4} (k^2 \text{sen}^2 u)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} (k^2 \text{sen}^2 u)^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} (k^2 \text{sen}^2 u)^4 + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} (k^2 \text{sen}^2 u)^5 + \dots \right\} du$$

[20]

Abaixo damos os valores para a solução exata do pêndulo simples em várias situações de amplitudes iniciais.

Usando  $k^2 = \text{sen}^2 \pi/4 = \frac{1}{2}$ , amplitude inicial  $\theta_0 = 90^\circ$ , e  $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$  como o período conseguido na aproximação de pequenas amplitudes. Então, à medida que se avança na ordem da expansão, se obtém a correção para o período real do pêndulo. Aqui fizemos até a 5ª ordem.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 u}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{256} + \frac{225}{18432} + \frac{11025}{2359296} + \frac{893025}{471859200} + \dots \right\} \quad [21]$$

$$T = T_0 \times \{1 + 0,12500 + 0,03516 + 0,01221 + 0,00467 + 0,00189 + \dots\} = T_0 \times 1,17893 \text{ s} \quad [22]$$

Para outras amplitudes, exibimos os valores obtidos se variando dez graus na amplitude inicial,

Amplitude Inicial (em graus °)	Nosso Método para $T/T_0$	Método de Legendre para $T/T_0$
	$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)! k^{2n}}{n! \times n! \times 2^n \times 2^n} \times \frac{\Gamma[1/2(2n+1)] \Gamma(1/2)}{2 \Gamma[1/2(2n+2)]} \right]$	$\frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (k^n) \right)^2$
10	1.00190718814321 $\approx$ 1,00191	1.00190718814321 $\approx$ 1,00191
20	1.00766902575227 $\approx$ 1,00767	1.00766902575227 $\approx$ 1,00767
30	1.01740879271564 $\approx$ 1,01741	1.01740879271564 $\approx$ 1,01741
40	1.03134037407855 $\approx$ 1,03134	1.03134037407855 $\approx$ 1,03134

50	1.04978100671741 ≈ 1,04978	1.04978100671741 ≈ 1,04978
60	1.07316614687443 ≈ 1,07317	1.07316614687443 ≈ 1,07317
70	1.10205457744423 ≈ 1,10205	1.10205457744423 ≈ 1,10205
80	1.13709711339724 ≈ 1,13710	1.13709711339724 ≈ 1,13710
90	1.17892885208130 ≈ 1,17893	1.17892885208130 ≈ 1,17893

Deve ser reparado que os mesmos valores se conseguem usando os duplos fatoriais na notação de Legendre. Aqui o ensejo foi o uso das funções Gama e Beta.

#### 4. DISCUSSÃO

Nos cursos de bacharelado em matemática e de física, o uso das funções *beta* e *gama* são muito populares, com a função *gama* sendo de uma variável simples, enquanto que a função *beta* é de duas variáveis, juntas são úteis na resolução de muitos problemas.

*CHRISTIAN KRAMP (1760 – 1826) FOI QUEM INTRODUZIU PELA PRIMEIRA VEZ O SÍMBOLO N! EM SEU LIVRO “ÉLÉMENTS D’ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE” DE 1808. ANTES ERA DENOTADO POR  $\text{N}$  MAS PELA DIFICULDADE DE IMPRESSÃO, A NOTAÇÃO N! SE TORNOU MAIS PROEMINENTE.*

*JAMES STIRLING (1692 -1770) LEMBRADO HOJE PELA “ FÓRMULA DE STIRLING” É QUE FORNECEU PELA PRIMEIRA VEZ UM VALOR APROXIMADO PARA A FUNÇÃO FATORIAL N!, (OU DEPOIS PARA A FUNÇÃO GAMA  $\Gamma(N)$  ;  $N \geq 1$ ) APARECENDO COMO EXEMPLO 2 DA PROPOSIÇÃO 28 DE SEU LIVRO METHODUS DIFFERENTIALIS DE 1730. A LOUIS ARBOGAST (1759 - 1803) É GERALMENTE ATRIBUÍDA A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FATORIAL COMO SENDO UM PRODUTO DE UM NÚMERO FIXADO DE TERMOS INTEIROS EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA. A FUNÇÃO GAMA FOI APRESENTADA POR LEONHARD PAUL EULER (1707-1783) EM SUA FORMA INTEGRAL VISANDO GENERALIZAR A FUNÇÃO FATORIAL DE ARBOGAST PARA VALORES NÃO-INTEIROS E FICANDO CONHECIDA COMO A SEGUNDA INTEGRAL DE EULER. DEVIDO À SUA GRANDE IMPORTÂNCIA, FOI ESTUDADA POR OUTROS MATEMÁTICOS EMINENTES COMO ADRIEN-MARIE LEGENDRE, CARL F. GAUSS (1777-1855), CRISTOPH GUDERMANN (1798-1852), JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882), KARL WEIERSTRASS (1815-1897), CHARLES HERMITE (1822 - 1901) E MUITOS OUTROS. O PRIMEIRO USO RELATADO DO SÍMBOLO GAMA ( $\Gamma$ ) PARA ESSA FUNÇÃO FOI DEVIDO A LEGENDRE EM 1839. JÁ, A PRIMEIRA INTEGRAL DE EULER É NORMALMENTE DENOMINADA POR SEU NOME MAIS COMUM, A FUNÇÃO BETA. O USO DO SÍMBOLO BETA ( $B$ ) PARA ESTA FUNÇÃO FOI USADO PELA PRIMEIRA VEZ EM 1839 POR JACQUES P.M. BINET (1786-1856).*

Como forma de exemplos para algumas comparações, estudamos trabalhos de alguns autores que publicaram resultados sobre a solução do problema do pêndulo simples. Aqui nos restringimos a apenas casos em que a amplitude inicial é  $90^\circ$ .

- A princípio, se usando a expansão em série, a notação fatorial de Stirling, e o duplo fatorial de Legendre, a solução do problema do pêndulo simples, para  $0 \leq k^2 < 1$ , fica sendo,

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \text{sen}^2 u)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \text{sen}^2 u + \frac{3}{8} (k^2 \text{sen}^2 u)^2 + \frac{15}{48} (k^2 \text{sen}^2 u)^3 + \frac{105}{384} (k^2 \text{sen}^2 u)^4 + \\ &+ \frac{945}{3840} (k^2 \text{sen}^2 u)^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (k^2)^n \text{sen}^{2n} u = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (k^n) \right)^2 ; \quad k \equiv \text{sen } \theta_0 / 2 \end{aligned}$$

[23]

Aqui se faz o uso da notação,

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n} u \, du = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad [24]$$

com  $n!!$  denotando o duplo fatorial. A solução exata é,

$$T = T_0 \times \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{sen}^2(\theta_0/2) + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \text{sen}^4(\theta_0/2) + \left(\frac{15}{48}\right)^2 \text{sen}^6(\theta_0/2) + \left(\frac{105}{384}\right)^2 \text{sen}^8(\theta_0/2) + \left(\frac{945}{3840}\right)^2 \text{sen}^{10}(\theta_0/2) + \dots \right] \quad [25]$$

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \right)^2 \times \text{sen}^{2n}(\theta_0/2) \right] = T_0 \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \right)^2 \times \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (k^n) \right)^2 \right] = T_0 \times 1,17893 \text{ s.} \quad [26]$$

- Usando o método da série de potências[6], onde o resultado da expansão do período  $T$  é em torno de  $x=0$  ( $x \equiv k^2 \text{sen}^2 u$ , Eq. [11]) é uma série convergente para  $|x| < 1$ ; Edwards e Penney[7], Fulcher e Davis[8] e Benacka[9] dão soluções para o pêndulo não-linear liberado desde o repouso de um ângulo inicial  $\theta_0$ , em termos do período  $T_0$  em MHS,

$$T = T_0 \left[ 1 + (1/2)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 k^8 + \left(\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\right)^2 k^{10} \dots \right] =$$

$$= T_0 \times \left( 1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{256} + \frac{225}{18432} + \frac{11025}{2359296} + \frac{893025}{471859200} + \dots \right) = T_0 \times 1,17893 \text{ s} \quad ; \quad k \equiv \text{sen}(\theta_0/2)$$

[27]

- Qureshi et al.[10] usaram a função hipergeométrica ordinária, definida por Gauss em 1812, para resolver o problema exatamente. Sua análise é apresentada para uma amplitude máxima de  $90^\circ$ . Eles relataram que suas funções hipergeométricas se destinam à estudantes de pós-graduação familiarizados com essas funções mais complexas,

$$T = T_0 \frac{\sqrt{\pi} 9/16}{(\Gamma(0,75))^2 9/16} = T_0 \frac{9\sqrt{\pi}}{16(\Gamma(1,75))^2} = T_0 \times 1,18034 \text{ s} \quad [28]$$

- Nelson and Olsson[11] fornece a seguinte expressão que deduziram,

$$T = T_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 \text{sen}^{2n} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right] = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right) \quad [29]$$

e à qual é uma expressão similar dada em Wikipedia, a enciclopédia livre,

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \frac{173}{737280} \theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760} \theta_0^8 + \frac{1319183}{951268147200} \theta_0^{10} + \dots \right) = T_0 \times 1,17966 \text{ s} \quad [30]$$

- A fórmula dada por Kidd-Fogg [12] que tem atraído o interesse devido a sua simplicidade,

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta_0/2)}} \rightarrow T = T_0 \times 1,18921 \text{ s} \quad [31]$$

- Molina [13] usa um método semelhante a uma interpolação na linearização, obtém,

$$T = T_0 \left( \frac{\text{sen} \theta_0}{\theta_0} \right)^{-3/8} = T_0 \times 1,18453 \text{ s} \quad [32]$$

- Lima e Arun [14] faz uma interpolação para a função  $\sqrt{(1-k^2 \text{sen}^2 \phi)}$  obtendo,

$$T = -T_0 \times \frac{\ln[\cos(\theta_0/2)]}{1 - \cos(\theta_0/2)} = T_0 \times 1,18328 \text{ s}; \quad [33]$$

onde repararam que  $\ln[\cos(\theta_0/2)] < 0$ , e assim  $T > 0$  para  $|\theta_0| < \pi$ .

- Carvalhaes e Suppes[15] emprega o método da média aritmética geométrica no cálculo do período, aqui exibido em 4ª. ordem,

$$T = T_0 \frac{16}{1 + q + 2q^{1/2} + 2^{3/2} q^{1/4} (1+q)^{1/2} + 2^{7/4} q^{1/8} (1+q)^{1/4} (1+q + 2q^{1/2})^{1/2}} = T_0 \times \frac{16}{13,55537} = T_0 \times 1,18034 \text{ s};$$

$q \equiv \cos(\theta_0/2)$  [34]

### REFERÊNCIAS

- [1] - Galileu Galilei – **Origem:** Wikipédia, a Enciclopédia Livre;
- [2] - C. Huygens. *Horologium Oscillatorium sive De Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometric* (Paris, 1673), traduzido para o inglês por R. J. Blackwell como *The Pendulum Clock, or Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula as Applied to Clocks*. (Iowa State Univ. Press, Ames, 1986);
- [3] - F. S. Lopes, R. N. Suave e J. A. Nogueira. Uma revisão das aproximações lineares para grandes amplitudes de oscilações do período de um pêndulo simples. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **vol. 40, n° 3**, e3313 (2018);
- [4] - John Wallis – **Origem:** Wikipédia, a Enciclopédia Livre;
- [5] - A. M. Legendre. *Memoires de la classe des sciences mathematiques et physiques de l’Institut de France*. Paris, 1809;
- [6] - M. Abramowitz. *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Mineola, 1974;
- [7] - C. H. Edwards e D. E. Penney. *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. 6th ed., (Pearson International Edition, 2009);
- [8] - L. P. Fulcher e B. F. Davis. Theoretical and experimental study of the motion of the simple pendulum. *Am. J. Phys.* **44(1)**, 51–55 (1976);
- [9] - J. Benacka. An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small-angle regime. *American Journal of Physics* **74(10)** October (2005);
- [10] – M. I. Qureshi, M. Rafat e S. I. Azad. The exact equation of motion of a simple pendulum of arbitrary mplitude: a hypergeometric Approach. *Eur. J. Phys.* **31** 1485–1497 (2010);

- [11] - R. A. Nelson e M. G. Olsson. The pendulum - Rich physics from simple system. *Am. J. Phys.* **54**(2), 112–121 (1986);
- [12] - R. B. Kidd e S. L. Fogg. A simple formula for large-angle pendulum period. *Phys. Teach.* **40**, 81–83 (2002);
- [13] – M. I. Molina. Simple linearization of the simple pendulum for any amplitude. *Phys. Teach.* **35** 489–90 (1997);
- [14] - F. M. S. Lima e P. Arun. An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime. *Am. J. Phys.* **74**(10), 892–895 (2006);
- [15] - C. G. Carvalhaes e P. Suppes. O cálculo de alta precisão do período do pêndulo simples. *Rev. Bras. Ensino Fís.* **31 no.2** Abr/Jun 2009.