

EXPERIMENTO DO SISTEMA MASSA-MOLA VERTICAL USANDO ARDUÍNO

VERTICAL MASS-SPRING SYSTEM EXPERIMENT USING ARDUINE

Osvando da Silva da Conceição¹, Juan A. Leyva-Cruz² e M. S. R. Miltão

Laboratório de Instrumentação Física, Departamento de Física da UEFS, Av. Transnordestina, s/n - Novo Horizonte, 44036-900 - Feira de Santana – Bahia.

No presente trabalho apresentamos um estudo experimental sobre o sistema físico massa-mola vertical. Foi realizada uma revisão bibliográfica sobre as leis físicas envolvidas, especialmente a lei de Hooke e uma descrição da tecnologia Arduino. Uma montagem experimental clássica e outra automatizada usando o microcontrolador Arduino foram construídas. Foram realizados quatro experimentos diferentes, sendo que dois foram de forma automatizada e os últimos de maneira manual. Das análises dos resultados obtidos, podemos concluir que o experimento do sistema massa-mola vertical realizado de maneira automatizada, apresenta vantagem em relação ao experimento realizado manualmente. Esta abordagem pode servir de base para os estudos didáticos nos cursos de Física e Engenharias.

Palavras-chaves: sistema massa-mola vertical, lei de Hooke, Arduino,

In the present work we present an experimental study on the vertical mass-spring physical system. A bibliographic review was carried out on the physical laws involved, especially Hooke's law and a description of the Arduino technology. A classic experimental setup and an automated one using the Arduino microcontroller were built. Three different experiments were carried out, two of which were done manually and the last one was automated. From the analysis of the results obtained, we can conclude that the experiment of the vertical mass-spring system carried out in an automated way, presents an advantage in relation to the experiment carried out manually. This approach can serve as a basis for didactic studies in Physics and Engineering courses.

Keywords: Vertical mass-spring system, Hooke's law, Arduino.

1 INTRODUÇÃO

Na natureza existem diversos fenômenos físicos que podem ser representados através de sistema mecânico oscilante harmônico. Segundo Resnick e Halliday, define-se um oscilador harmônico como um sistema dinâmico que realiza movimentos periódicos, para frente e para trás, seguindo a mesma trajetória (**RESNICK; HALLIDAY, 1984**). No âmbito da física, esses fenômenos aparecem em diversas áreas, por exemplo, na mecânica têm-se os pêndulos e o sistema massa-mola; descrito pela mecânica ondulatória, tem-se as vibrações de instrumentos musicais e diapasões; no eletromagnetismo, as oscilações da corrente nos circuitos elétricos. Esses sistemas na situação real são sujeitos as forças amortecedoras, de modo que as amplitudes e energia mecânica diminuam com tempo. Conforme, Landau e Lifchitz, na situação real, esses movimentos depois de um tempo finito cessam. Esse tal comportamento é sempre devido às forças dissipativas de energias, ou seja, o movimento oscilatório diminui gradualmente com o passar do tempo (**LANDAU E LIFCHITZ, 2004**). Em particular, na situação real, o sistema massa mola apresenta um comportamento oscilatório amortecido, mas sobre determinadas condições o mesmo pode ser considerado como oscilador harmônico. Segundo Nussenzveig, considera-se um sistema ideal aquele que consiste em uma massa m presa a uma das extremidades de uma mola de constante elástica K , dessa forma o mesmo constitui em um bom exemplo de oscilador harmônico simples. Quando comprimida ou

¹ Estudante de graduação do Curso de Licenciatura em Física.

² E-mail: juan@uefs.br

esticada, a mola exerce uma força no bloco, no sentido contrário do deslocamento sempre puxando o bloco para a posição de equilíbrio (NUSSENZVEIG, 2002).

Um dos experimentos mais tradicionais empregados em aulas da disciplina de Física Geral e Experimental 2, é aquela que verifica a relação linear entre a força aplicada em um sistema e sua elongação (deformação), ou seja, a lei de Hooke (LABURU; ALMEIDA, 1998). Geralmente, o equipamento convencional muito empregado para a realização deste experimento constitui-se, basicamente, de uma mola no formato espiral e massas (discos médios de bronze) com padrões aferidos. Na realização de experimento dessa natureza, efetivamente, surgem fatores intrínsecos ao processo de medição. Fatores esses que estão relacionados a diversos aspectos do ato de medição, como o erro sistemático.

A medida de uma grandeza física através de um método científico consiste na obtenção da melhor aproximação para o seu valor real, utilizando-se de instrumentos de medida e métodos reprodutíveis. O ato de medir uma grandeza física é sujeito a erros que interferem na obtenção do seu valor real: Erros do operador (ex: leitura equivocada do instrumento de medida), erros instrumentais (ex: instrumentos de medida mal calibrados) e erros aleatórios (ex: variações aleatórias de condições físicas como temperatura, pressão, umidade do ar, etc.).

O processo de medir, apoia-se em instrumentos de medição calibrados segundo o padrão escolhido. No entanto, em muitas situações a execução da medição não é automatizada e o observador é uma parte essencial do processo, contribuindo para a sua limitação.

Neste sentido, o presente trabalho propõe uma alternativa, um mecanismo que é a automação do experimento do sistema massa mola vertical, com a finalidade de minimizar a influência das fontes de erros nas medidas. Para tanto, será utilizado neste presente trabalho o Arduíno e um sensor ultrassônico modelo *HC-SR04* como mecanismo de medição. Através dos mesmos espera-se coletar dados com maior precisão possível. Recentemente no nosso laboratório foram realizados alguns trabalhos envolvendo a tecnologia Arduíno. (J. A. LEYVA-CRUZ et al., 2019).

O presente trabalho será dividido em cinco seções, sendo que na segunda seção serão abordados os conceitos físicos envolto ao mesmo, na terceira serão tratados os procedimentos da confecção experimental, tanto a automatizada com a manual, na quarta seção serão expostos os resultados referentes aos experimentos automatizados, bem como os confeccionados manualmente, e será feita também uma discussão dos aspectos dos mesmos. Finalmente, na última será feita uma conclusão dos resultados.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Oscilações Harmônicas

O sistema massa mola ideal, sem dúvida, é o mais utilizado para investigar as oscilações harmônicas. Quando retirado de sua posição de repouso e, logo em seguida solto, o mesmo realizará um movimento oscilatório Harmônico, desde que o movimento seja em torno da sua posição de equilíbrio. Oscilações essas, cujo estudo é muito importante para descrição de diversos fenômenos físicos, uma vez que, encontram-se sistemas oscilantes em toda a área da física. Por exemplo, na mecânica têm-se os pêndulos e o sistema massa-mola; descrito pela mecânica ondulatória, tem-se as vibrações de instrumentos musicais e diapasões; no eletromagnetismo, as oscilações da corrente nos circuitos elétricos.

Dessa forma, segundo Resnick e Halliday, define-se um oscilador harmônico como um sistema dinâmico que realiza movimentos periódicos, para frente e para trás, seguindo a mesma trajetória (RESNICK; HALLIDAY, 1984).

Para uma descrição matemática da dinâmica de um sistema oscilante, considera-se uma partícula de massa m que oscila harmonicamente sob a ação de forças conservativas. Em relação a tais forças, podemos associar uma energia potencial $U(x)$. Na figura 1, abaixo temos uma representação para energia potencial.

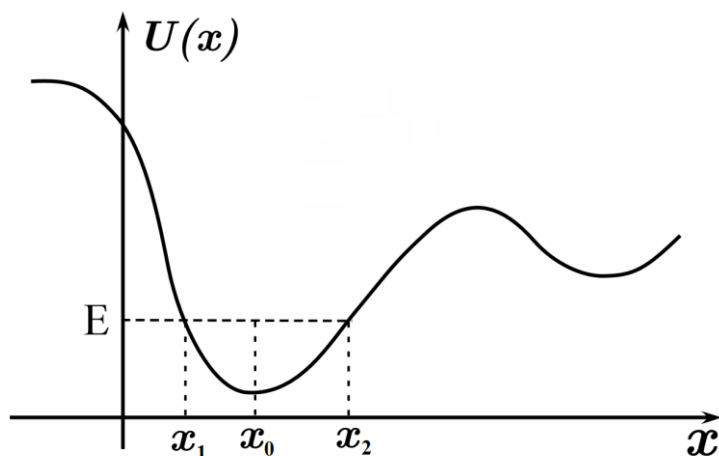


Figura 1 - Energia potencial $U(x)$ devido a uma força conservativa $F(x)$.

Suponha que o sistema tenha uma dada energia E , como ilustrado na figura acima. O movimento da partícula ficará restrito aos pontos x_1 e x_2 e sua energia potencial será mínima na posição de equilíbrio x_0 (equilíbrio estável). Entre os pontos x_1 e x_2 chamado pontos de retorno, é possível tomar o gráfico da energia potencial $U(x)$ como uma parábola (NUSSENZVEIG, 2002), e assim escrevê-la como:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2,1)$$

Logo, para pequenos desvios em torno da posição de equilíbrio x_0 , a força que atua na partícula, em módulo, é:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} Kx^2 \right) = -Kx \quad (2,2)$$

Essa força é proporcional ao deslocamento, além disso, é restauradora já que partícula tende a voltar para a posição de equilíbrio. A expressão (2.2) é também conhecida como lei de *Hooke*.

2.2 Oscilador harmônico simples

Considere um sistema ideal que consiste em uma massa m presa a uma das extremidades de uma mola de constante elástica K , dessa forma o mesmo constitui em um bom exemplo de oscilador harmônico simples. Quando comprimida ou esticada, a mola exerce uma força no bloco, dada pela equação (2.2), no sentido contrário do deslocamento sempre puxando o bloco para a posição de equilíbrio. Na figura 2, temos uma representação desse sistema (NUSSENZVEIG, 2002).

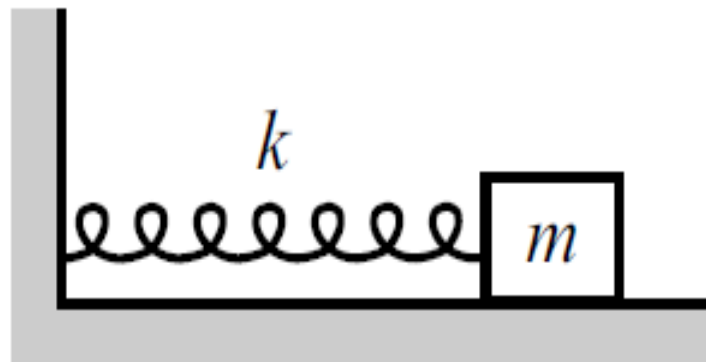


Figura 2 - Sistema Massa-Mola Horizontal. **Fonte:** Morin (2008).

Aplicando a segunda lei de Newton, as equações do movimento do sistema massa-mola podem ser representadas como,

$$m\ddot{x} = -Kx \quad (2.3)$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \quad (2.4)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.5)$$

onde $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ é a velocidade angular do sistema.

Além do modelo massa-mola representado acima, qualquer sistema pode ser chamado de oscilador harmônico se sua dinâmica for representada pela equação de movimento (2.3). Então, é válido dizer que tal sistema executa um movimento harmônico simples (MHS) (RESNICK; HALLIDAY, 1984). Para este contexto é importante ressaltar que estamos considerando apenas pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.

A solução geral de um sistema que descreve um MHS é bastante conhecida na literatura, expressa por (LANDAU; LIFCHITZ, 2004).

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.6)$$

onde A é a amplitude das oscilações e ω_0 é a frequência angular. O termo $(\omega_0 t + \varphi)$ é a fase, sendo φ a constante de fase.

A substituição, $t \rightarrow t + 2\pi/\omega_0$ na equação (2.6) resulta em:

$$X(t) = A \cos[\omega_0(t + 2\pi/\omega_0) + \varphi] \quad (2.7)$$

$$= A \cos[\omega_0 t + 2\pi + \varphi] \quad (2.8)$$

$$= A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.9)$$

Perceber-se então que a equação original é restauradora. Fisicamente, o termo $2\pi/\omega_0$ é denominado período T de oscilação, que é o tempo que o sistema leva para retornar à posição inicial, isto é, realizar um ciclo. Para o oscilador harmônico a fórmula é dada por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.10)$$

Dessa forma, observa que o período de oscilação é independente da amplitude.

A energia total do oscilador é:

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \quad (2.11)$$

Na figura 3, verifica-se que a energia total é constante, ou seja, ela não varia com a passagem do tempo. Quando a energia potencial $U(t)$ é zero (posição de equilíbrio), a energia cinética é máxima. Quando o deslocamento é máximo a energia cinética se anula e temos, neste momento apenas energia potencial. Logo, de acordo com a equação acima (2.11), a energia total é proporcional apenas ao quadrado da amplitude.

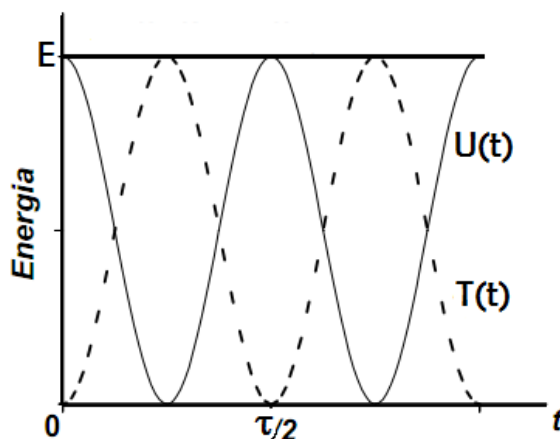


Figura 3 - Energia mecânica total do oscilador harmônico. Fonte - Resnick e Halliday (1984).

2.3 Oscilações Amortecidas

As oscilações harmônicas simples, estudadas na seção anterior, apresentavam os osciladores harmônicos executando um movimento contínuo em torno da posição de equilíbrio, de modo que os mesmos oscilariam ininterruptamente, ou seja, sem cessar seu movimento. No entanto, na situação real, esse movimento depois de um tempo finito tende a zero. Esse tal comportamento é sempre devido às forças amortecedoras de energias, ou seja, a amplitude do movimento oscilatório diminui gradualmente com o passar do tempo. De acordo com Landau e Lifchitz (2004), isso acontece devido à interação do meio com o sistema que tende a retardar o movimento do oscilador. Por exemplo, quando nos balançamos numa rede, o atrito devido ao suporte da rede com a parede, bem como o da resistência do ar, faz com que o balanço da rede diminua seu movimento até parar.

Nesta seção serão estudados os movimentos de sistemas nos quais haverá a presença de atrito que ocasiona a dissipação de energia, de modo que seus movimentos diminuam, gradativamente, até cessar completamente. Os movimentos desses tais sistemas são amortecidos por atrito e denomina-se movimento harmônico amortecido (MHA).

Segundo H. Moysés Nussenzveig, a resistência de um fluido, como o ar, ao deslocamento de um obstáculo, é proporcional à velocidade para velocidades suficientemente pequenas, o que se aplica a pequenas oscilações (H. MOYSÉS NUSSENZVEIG, 2002).

Muitos sistemas mecânicos podem ser apresentados por um sistema massa-mola amortecidos na vertical, como mostrados na figura 4.



Figura 4 - Sistema massa mola amortecido na vertical. **Fonte:** foto do autor

O sistema massa mola amortecido é normalmente, utilizado para ilustrar a resposta de uma equação diferencial de segunda ordem. Seu modelo é dado por:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = f, \quad (2.12)$$

onde $c\dot{X}$ é a força de amortecimento e, $-kX$ é força restauradora elástica da mola.

Na situação estática, o sistema massa mola estará em equilíbrio, ou seja, a massa estará parada em relação à mola, de modo que a força elástica terá o mesmo módulo da força peso da massa. Assim, (2.12) torna-se:

$$mg = ky, \quad (2.13)$$

onde mg é a força gravitacional e ky é força elástica da mola.

Consideremos, agora, a situação dinâmica em que a força de amortecimento é considerada. Essa força é proporcional à velocidade da massa do corpo e atuará no sentido contrário da velocidade do corpo. Nesta circunstância, o modelo matemático que representará o movimento do sistema massa mola amortecido é dado por:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = 0 \quad (2.14)$$

onde $-c\dot{X}$ é a força de amortecimento que atua no sentido contrário da velocidade do corpo.

A solução geral pode ser obtida, a partir da seguinte solução tentativa:

$$X(t) = Ae^{St}, \quad (2.15)$$

onde A e S são constantes a serem determinadas.

Diferenciando duas vezes a expressão (2.15), obtemos:

$$\dot{X}(t) = SAe^{St} \quad (2.16)$$

$$\ddot{X}(t) = S^2Ae^{St} \quad (2.17)$$

Substituindo (2.15), (2.16) e (2.17) em (2.14), tem que:

$$(mS^2 + cS + K) e^{St} = 0 \quad (2.18)$$

Para que a solução não seja trivial (diferente de zero para valores aleatórios de t), a constante A deve ser diferente de zero e S precisa ser finito. Logo, e^{St} é diferente de zero, de tal forma que (2.18), fica da seguinte forma:

$$mS^2 + cS + K = 0 \quad (2.19)$$

Esta é a equação característica do sistema, cuja solução é:

$$S = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (2.20)$$

Dessa forma, temos duas raízes para equação característica, cada uma delas produz uma solução da forma de (2.15). Se as raízes são distintas, a solução geral é a combinação linear dessas duas formas, como é mostrado abaixo:

$$S(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (2.21)$$

onde A_1 e A_2 são constantes.

Verifica-se a solução, equação (2.21), afim de demonstrar uma interpretação física dos resultados. Para tanto, considera-se:

$$W = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (2.22)$$

A equação (2.22) é denominada de frequência angular, a mesma possibilita a análise de três tipos de movimento. São eles; amortecimento subcrítico para $W < 0$, amortecimento supercrítico para $W > 0$ e amortecimento crítico $W = 0$. Na figura 5, mostramos as curvas que caracterizam os três tipos de movimento.

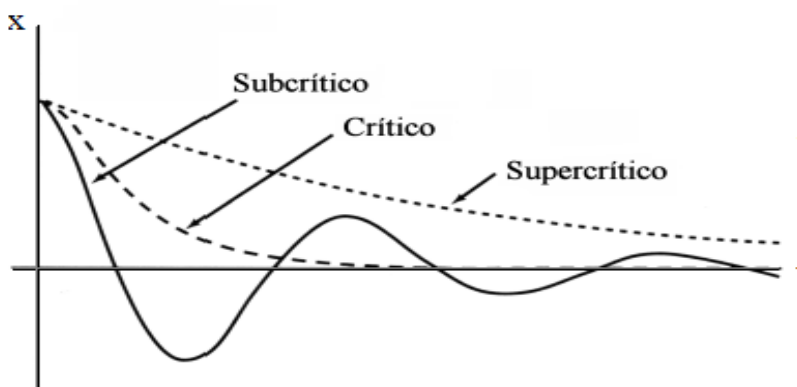


Figura 5 - Três tipos de movimento do oscilador amortecido. **Fonte:** Adaptada de Thornton e Marion (2011).

2.4 Funcionamento da placa Arduino-UNO e sensor ultrassônico

A placa Arduino se define em uma plataforma de microcontrolador de código aberto e linguagem padrão baseada em C/C++ e em softwares e hardwares livres, permitindo seu uso como gerenciador automatizado de dispositivos de aquisição de dados de sensores de entrada e de saída. (ARDUINO, 2016). A IDE (Ambiente Integrado de Desenvolvimento) do Arduino é uma aplicação *cross-plataform* escrita em Java, o que significa que ela é portátil para diversos sistemas operacionais. Inclui um editor de código de fonte livre, com identificação automática que é capaz de compilar e fazer upload para a placa (MARTINAZZO, *et. al*, 2014).

Ainda segundo MARTINAZZO, *et. al* (2014) a placa Arduino UNO, ver Figura 6, é uma placa básica, com 6 portas analógicas e 14 portas digitais, sendo 6 por meio de modulação por largura de pulso ou (PWN).



Figura 6 - Imagem da placa Arduino UNO. **Fonte:** foto do autor

Os sensores ultrassônicos operam por transmissão de energia ultrassônica e não são sujeitas à interferência eletromagnética. Atuam de maneira eficiente na detecção de objetos, cujas distâncias variam entre milímetros até vários metros e pode ser empregada para detectar os mais variados tipos de objetos. A figura 11 mostramos a imagem de um sensor ultrassônico modelo HC-SR04.



Figura 2.11 - Imagem de um sensor ultrassônico (modelo HC – SR04). **Fonte:** foto do autor

O sensor ultrassônico HC-SR04 pode medir distância de 2 cm a 4 m com alta precisão. O mesmo possui um circuito com emissor e receptor acoplados e 4 pinos (VCC, Trigger, ECHO, GND) para a medição. Para executar a medição é necessário alimentar o sensor e colocar o pino Trigger em nível alto por mais de 10us. Dessa forma, o sensor emitirá uma onda sonora que ao encontrar um obstáculo refletirá a onda de volta em direção ao sensor, sendo que no tempo de recebimento do sinal o pino ECHO ficará em nível alto, como é mostrado na figura 12.

Portando o cálculo da distância pode ser feito de acordo com o tempo em que o pino ECHO permaneceu em nível alto após o pino trigger ter sido colocado em nível alto.

$$\text{Distância} = [\text{Tempo ECHO em nível alto} * \text{Velocidade do Som}] / 2.$$

onde a velocidade do som pode ser considerada igual a 340 m/s. A divisão por 2, deve-se ao fato da onda ultrassônica ser emitida e refletida.

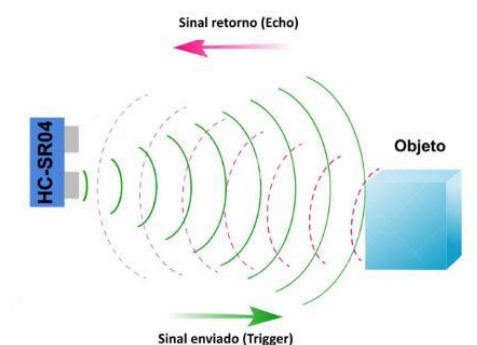


Figura 12 - Princípio do funcionamento do sensor ultrassônico HC-SR04. **Fonte:** FILIPEFLOP, 2014

3 MÉTODOS E MATERIAIS

3.1 Montagem experimental

Aqui vamos discutir os componentes eletrônicos bem como os métodos utilizados na confecção de dois experimentos automatizados referente ao sistema massa-mola vertical. Sendo que, o primeiro experimento verifica a lei de Hooke, ou seja, a relação linear entre a força aplicada numa determinada mola e sua deformação e, a partir da mesma determina-se a constante elástica da mola. Já o segundo experimento automatizado, tem a finalidade de medir o período de oscilação e a constante elástica da mola do sistema. Para tanto, iremos utilizar a placa Arduino e o sensor ultrassônico para a aquisição dos dados. O sensor ultrassônico HC-SR04 necessita de uma voltagem de 5 V e uma corrente menor que 2 mA. Tem um funcionamento melhor se posicionada com um ângulo menor que 15° entre o sensor e o obstáculo. Consegue medir distancias entre 2 cm a 5 m. (ITEAD STUDIO, 2010).

Os fios jumper que foram utilizados, têm pontas moldadas para facilitar a inserção na *protboard* ou pode-se criar os próprios, cortando tiras curtas de fios rígidos de núcleo único e retirando cerca de 6 mm da ponta. (ARDUINO, 2016).

Primeiramente, foi necessário nos certificar se o Arduino estava desligado, para tanto desconectamos o cabo USB do PC. Em seguida, pegou-se o sensor ultrassônico, e o conectou no Arduino utilizando jumpers. Para nos certificarmos que o sensor ultrassônico estava conectado corretamente, para isso conectou-se o terminal VCC no pino de alimentação de 5 V, o terminal TRIG ao pino 12, o terminal ECHO no pino 13 e finalmente o GND no pino terra (GND) conforme é mostrado na figura 13 abaixo.

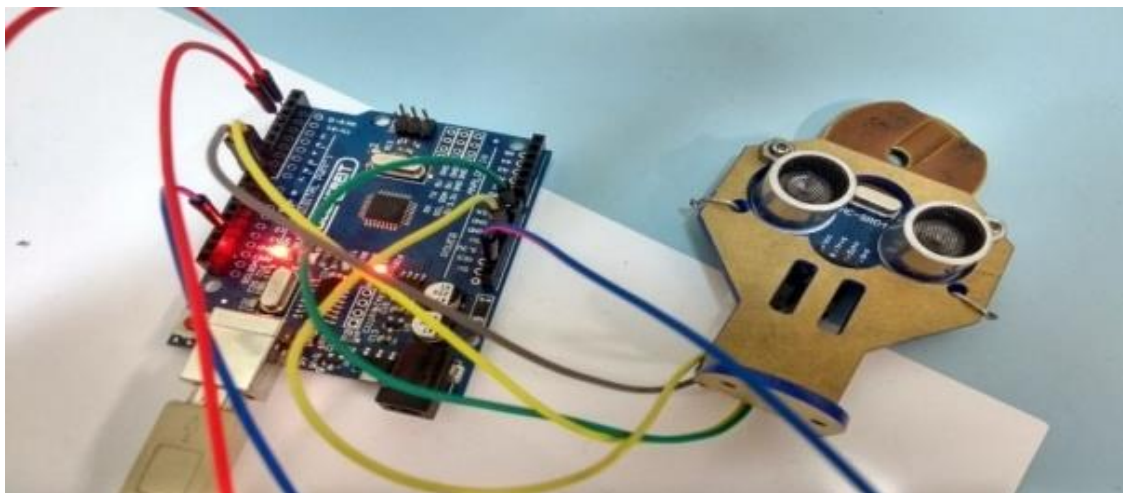


Figura 13 – Circuitaria montada com Arduino para realizar os experimentos

Para conectar-se o botão *push Button* à placa protboard, ligou-se uma perna do resistor de 150 ohms de modo que ficasse ligada em série com uma das pernas do botão, e a outra perna do resistor ligada na porta GND do Arduino. Em seguida conectamos a outra perna do botão ao pino de 5 V, feito isso, ligou-se o Arduino ao computador através do cabo USB.

3.2 Experimentos automatizados do sistema massa mola vertical

O sensor ultrassônico foi inicialmente calibrado através do posicionamento do suporte de massa de 48 g, a distância conhecida e foi feita verificação da compatibilidade de tal distância com as respostas retornadas pelo sensor, para isso foi utilizada uma régua milimetrada para medir a distância entre o sensor e o Arduino. E percebemos que o valor lido pelo sensor apresentava uma discrepância em relação ao da régua. Para resolver esse problema, para tanto foi necessário mudar a biblioteca a fim de obter uma medida exata, conforme a figura 14, ilustrada abaixo.

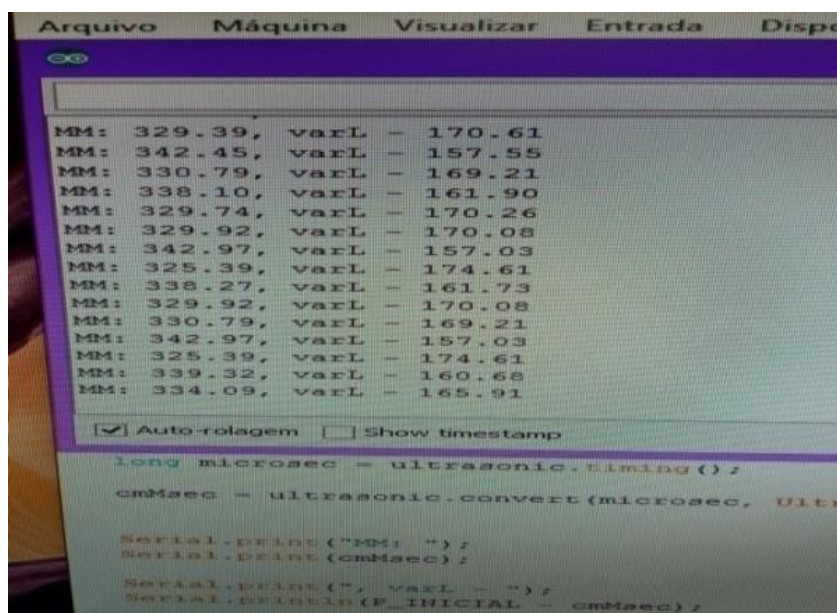


Figura 14 - IDE do Arduino ajustando a distância entre o objeto e o sensor.

Em seguida, o sensor foi calibrado para limitar a distância máxima em que os dados referentes ao tempo poderiam ser coletados, nesse experimento foi delimitado que a distância máxima para que os dados fossem coletados seria de 48.5 cm, ou seja, caso a base do suporte das massas estivesse a uma distância menor que estabelecida, cronometro interno do Arduino coletaria o tempo em questão. No entanto, se caso a base do suporte estivesse a uma distância superior do que a estabelecida, o Arduino não receberia nenhum comando. Para tanto, foi usado um botão.

Posteriormente, teve-se que converter a unidade de centímetros para metros com a finalidade de obter uma coleta de dado mais preciso. Além disso, para melhorar ainda mais a precisão, foi necessário modificar o divisor da relação entre o tempo e a distância. Foram usadas sete massas no formato de disco, sendo que seis massas de 10 g e uma de 48 g, conforme a figura 15. O aparato experimental que foi usado para realizar os experimentos encontra-se na também na figura 15.



Figura 15 - Suporte contendo as massas em formas de disco, e o aparato experimental massa mola vertical automatizado.

Para o primeiro experimento, seguiu-se o seguinte esquema, as massas foram adicionadas uma a uma no suporte, de modo que se percebia uma correspondente deformação. Sendo que, para cada massa adicionada ao suporte foram repetidas três medidas, cujas finalidades eram medir a constante elástica da mola, bem como verificar a lei de *Hooke*. O código deste experimento encontra-se no apêndice A.

Já no segundo experimento, cujos objetivos eram medir os períodos de tempo de oscilação e determinar a constante elástica da mola. Sendo assim, para alcançar tais objetivos, teve-se que puxar a mola a partir de sua posição de equilíbrio, em que a força restauradora da mola teria o mesmo valor que a força peso da massa, logo em seguida a soltamos, de modo que a mesma oscilasse. Feito isso, acionou-se de forma imediata o botão para que o Arduino e o sensor ultrassônico coletassem os dados referentes às respectivas medidas. Fez-se esse tal procedimento, para todas as massas que foram adicionadas no suporte. O código deste experimento encontra-se no apêndice B.

Além disso, fez-se também, uma medição para as posições ocupadas pelo sistema massa-mola em função do tempo, com o objetivo de analisar o comportamento oscilatório do sistema, cujo código encontra-se no apêndice C.

Usamos o monitor serial do Arduino para registrar em tempo real a formação do gráfico referente ao comportamento oscilatório do sistema massa-mola, conforme é mostrado na figura 16 abaixo.

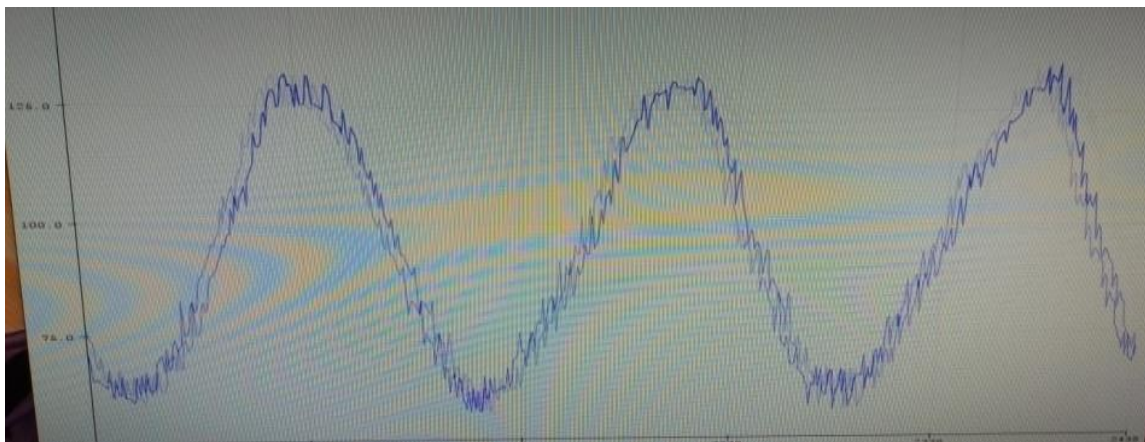


Figura 16 - Gráfico do comportamento oscilatório do sistema massa mola vertical.

3.3 Procedimento da realização do experimento manual

Realizou-se as medições dos períodos de oscilações, bem como da constante elástica da mola através do experimento manual, com o objetivo de comparação com os valores dos tempos referentes aos períodos e da constante elástica da mola, obtidos por meio do experimento automatizado usando o Arduino. No processo de realização do experimento manual do sistema massa-mola vertical, foram utilizados uma régua milimetrada de $(60 \pm 0,05)$ cm. Além disso foram usadas onze massas de 10 gramas cada uma, também foi utilizada uma mola espiral de comprimento natural de 10,90 cm, um suporte de massa 50 gramas para apoiar as massas durante as medidas e um tripé da marca standard com sapatas niveladoras amortecedoras Ref.9241, todas estas partes são ilustradas na figura 17.



Figura 17 - Imagem da régua milimetrada, o conjunto de 12 massas no formato de disco, e o suporte tripé com sapatas niveladas.

O procedimento referente ao primeiro experimento manual, foi estabelecido da seguinte forma, primeiramente, mediu-se o comprimento da mola tanto na posição horizontal como na vertical para nos certificarmos se a mola sofreu deformação. No entanto, a mesma manteve o mesmo comprimento de 10,90 cm nas duas situações, isso se deve ao fato da mola apresentar um peso muito pequeno e também devido a sua dureza. Se a mesma fosse mais comprida ou mais mole, certamente o seu comprimento se alteraria quando colocada na

posição vertical. Em seguida, certificamo-nos se a mola estava alinhada na direção vertical, feito isso montamos o sistema massa-mola vertical, como mostra a mesma figura 17.

Posteriormente, pesamos as 11 massas e nos certificamos se cada uma pesava 10 g, já a massa do suporte resultou no valor de 48 g após ser pesada, de 50 g referentes ao seu valor nominal. Então, colocamos a massa de 48g no sistema para iniciarmos o experimento que se consistia em medir a força ou o peso gerado em cada deslocamento quando era inserida uma massa, e a partir desta situação, determinar a constante restauradora da mola deste sistema. Sendo assim, iniciamos o experimento adicionando a massa referente ao suporte de 48g a mola, de modo que a mesma se estendeu em um pequeno comprimento. Feito isso, registramos a deformação sofrida pela mola e na situação de equilíbrio (em que o peso da massa é igual à força elástica) calculamos o valor da força restauradora elástica. Em seguida, adicionamos a massa de 10 g ao suporte e registramos a elongação sofrida pela massa bem como o valor correspondente da força na situação de equilíbrio. E assim, fizemos os mesmos procedimentos para as demais medidas.

Já no segundo procedimento referente ao experimento manual do sistema massa mola vertical ilustrado na mesma figura 17, para esse experimento foi utilizado o mesmo aparato, bem como as mesmas massas referentes ao experimento anterior. O experimento em questão tem a finalidade de medir o período de oscilação, estudar o movimento de oscilação e determinar a constante elástica da mola. Sendo assim, iniciamos o experimento da seguinte forma, em princípio alinhamos a mola de modo que ela oscilasse na direção vertical, em seguida colocamos a massa de 48g referente ao suporte em uma das extremidades da mola, de tal maneira que ela se deformasse até atingir a posição de equilíbrio. A partir da posição de equilíbrio puxamos a mola, e a soltamos cronometrando o tempo de 10 oscilações, foram feitas cinco medidas, sendo que umas submetidas a 10 oscilações. Em seguida, adicionamos a massa de 10 g ao suporte, e a partir da posição de equilíbrio a puxamos novamente, posteriormente a soltamos e cronometrando o tempo de 10 oscilações. E assim, repetimos o procedimento para as demais medidas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Resultados

Na tabela 4.1, encontram-se os valores das respectivas massas, utilizadas no primeiro procedimento experimental usando o Arduino, bem como os dados referentes às deformações da mola, cujos valores foram gerados pelo Arduino. Assim como, os da constante elástica da mola, também fornecido pelo mesmo, por meio da eq. (2.13).

Tabela 4.1 - valores das massas dos discos, das distensões da mola e os valores correspondentes da constante elástica da mola.

Massa (kg)	Deformação (m)	Constante elástica (N/m)
0,058	0,196	2,90
0,068	0,237	2,81
0,078	0,271	2,82
0,088	0,305	2,83
0,098	0,338	2,84
0,108	0,369	2,87

Através dos valores dispostos na tabela 4.1, construiu-se o gráfico da força em função da deformação, por meio do software Python. O mesmo é ilustrado figura 18 representado abaixo.

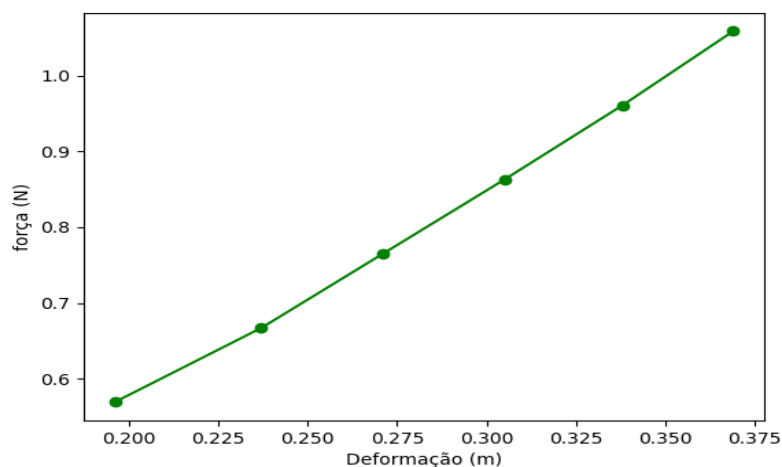


Figura 18 - Gráfico da força versus deformação.

Nas seguintes tabelas, (4.2) e (4.3) têm-se os dados experimentais, obtidos do primeiro procedimento experimental realizado de forma manual, acerca da relação linear entre a força e a deformação da mola. Cujos valores foram obtidos através da eq. (2.13).

Tabela 4.2 - Dados experimentais da massa, da força e suas respectivas incertezas.

Massa (kg)	σm (kg)	F (N)	σF (N)	$(F \pm \sigma F)$ (N)
0,05	0,01	0,49	0,09	$(0,49 \pm 0,09)$
0,06	0,01	0,59	0,09	$(0,59 \pm 0,09)$
0,07	0,01	0,69	0,09	$(0,69 \pm 0,09)$
0,08	0,01	0,78	0,09	$(0,78 \pm 0,09)$
0,09	0,01	0,88	0,09	$(0,88 \pm 0,09)$
0,10	0,01	0,98	0,09	$(0,98 \pm 0,09)$
0,11	0,01	1,08	0,09	$(1,08 \pm 0,09)$
0,12	0,01	1,18	0,09	$(1,18 \pm 0,09)$
0,13	0,01	1,27	0,09	$(1,27 \pm 0,09)$
0,14	0,01	1,37	0,09	$(1,37 \pm 0,09)$
0,15	0,01	1,47	0,09	$(1,47 \pm 0,09)$

Tabela 4.3 – Valores das distensões, da sua incerteza e os da incerteza do instrumento.

ΔX (mm)	σa (mm)	σb (mm)	σc (mm)	$(\Delta X \pm \sigma c)$ (mm)
163,00	0,01	0,05	0,05	$(163 \pm 0,05)$
198,00	0,01	0,05	0,05	$(198 \pm 0,05)$
236,00	0,01	0,05	0,05	$(236 \pm 0,05)$
271,00	0,01	0,05	0,05	$(271 \pm 0,05)$
296,00	0,01	0,05	0,05	$(296 \pm 0,05)$
329,00	0,01	0,05	0,05	$(329 \pm 0,05)$
362,00	0,01	0,05	0,05	$(362 \pm 0,05)$

390,00	0,01	0,05	0,05	(390 ± 0,05)
419,00	0,01	0,05	0,05	(419 ± 0,05)
451,00	0,01	0,05	0,05	(451 ± 0,05)
489,00	0,01	0,05	0,05	(489 ± 0,05)

A fim de averiguar a lei de *Hooke*, ou seja, a relação linear entre a força e a distensão da mola, para isso utilizaremos o método analítico do ajuste do mínimo quadrado. A partir dos dados experimentais dispostos nas tabelas 4.2 e 4.3, determinaremos os parâmetros da melhor reta ($Y = bX + a$) que se ajuste aos pontos medidos, especificamente, o valor da constante elástica da mola. Sendo assim, temos que:

Tabela 4.4 - Dados referentes ao ajuste dos mínimos quadrados.

Deformação (mm)	Força (N)	X ²	Y ²	X.Y
163,00	0,47	26569,00	0, 221	76,61
198,00	0,57	39204,00	0, 325	112,86
236,00	0,67	55696,00	0, 449	158,12
271,00	0,77	73441,00	0, 593	208,67
296,00	0,86	87616,00	0, 740	254,56
329,00	0,96	108241,00	0, 922	315,84
362,00	1,06	131044,00	1, 124	383,72
390,00	1,16	152100,00	1,35	452,4
419,00	1,26	175561,00	1,59	527,94
451,00	1,35	203401,00	1,82	608,85
489,00	1,45	239121,00	2,10	709,05
$\Sigma =$ 3604,00	$\Sigma =$ 10,58	$\Sigma =$ 1291994,00	$\Sigma =$ 11,23	$\Sigma =$ 3808,62

A partir dos dados da tabela 4.4, foi possível calcular o valor de **K**, bem como a sua incerteza, usando as seguintes expressões:

$$b = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (4.1)$$

$$b = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = 3,08 \text{ N/m} \quad (4.2)$$

$$\sigma_K = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^N X^2_{i=1}} = 0,01 \text{ N/m} \quad (4.3)$$

Portanto, o resultado para a constante elástica da mola é:

$$K = (3,08 \pm 0,01) \text{ N/m} \quad (4.4)$$

Com os valores da força e das distensões da mola, contidos nas tabelas 4.2 e 4.3, foi elaborado um gráfico da força em função da distensão da mola, com auxílio do software *SciDAVis*. Neste software são inseridos os valores da força, da distensão e de suas respectivas incertezas e gerando assim um gráfico de pontos experimentais.

A força é dada pela seguinte expressão:

$$F = K \Delta X \quad (4.5)$$

Na equação acima, substituindo F por Y e X por X, obtemos a seguinte equação

$$Y = KX \quad (4.6)$$

Ao aplicar-se a eq. (4.6), como ajuste, obteve-se o gráfico da força em função da deformação, conforme a figura 19, ilustrada abaixo.

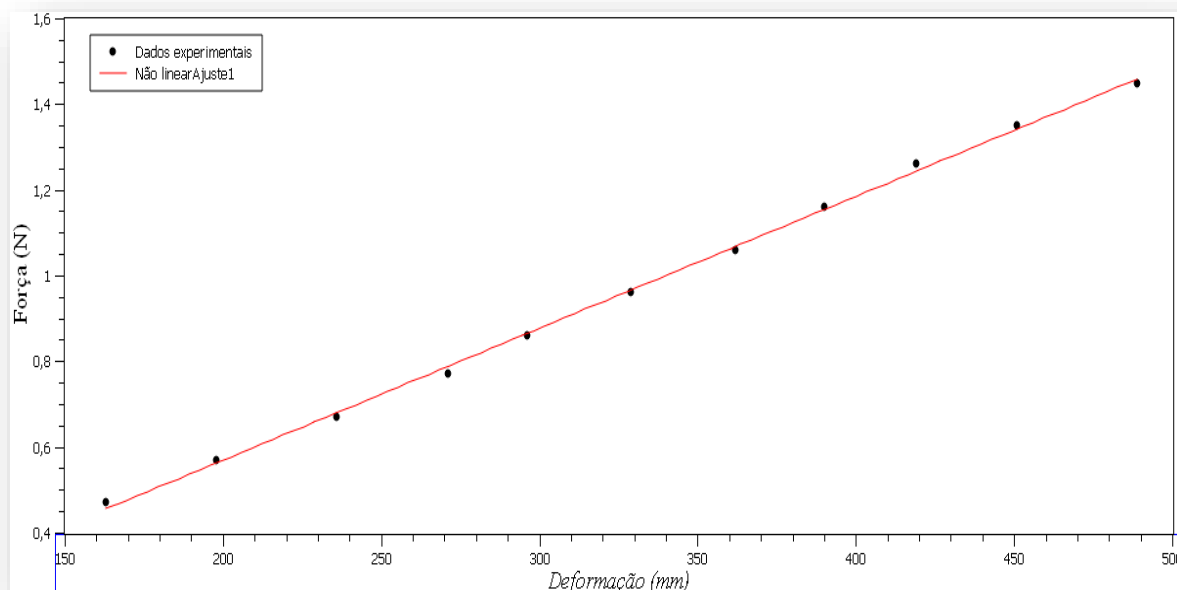


Figura 19: Gráfico da força versus deformação

Na figura 19, mostramos os resultados experimentais, da força em função da deformação, de um sistema massa-mola vertical. Cujo gráfico apresenta um comportamento linear. E por meio do mesmo, obteve-se o resultado dos valores da constante elástica bem como da sua incerteza, dado por $(3,08 \pm 0,01)$ N/m.

As comparações dos resultados, bem como dos respectivos erros relativos dos experimentos realizados de forma automatizada e manual, encontram-se dispostos na tabela 4.5 abaixo:

Tabela 4.5 - valores da constante elástica da mola obtidos de três maneiras e os e erros relativos para a comparação.

	Resultados	Erros relativos
Constante elástica da mola automatizada	$(2,85 \pm 0,01)$ N/m	14 %
Constante elástica da mola manual	$(3,08 \pm 0,01)$ N/m	23 %
Constante elástica da mola teórico	2,50 N/m	-

Através do experimento automatizado usando Arduino, foram obtidos os valores para os períodos dos tempos de oscilação e para a constante elástica da mola de diferentes massas. Os resultados encontram-se dispostos na tab.4.6 abaixo:

Tabela 4.6 – Períodos das oscilações, para cada massa (m) e suas correspondentes constantes elásticas (k).

Massa(kg)	T_1 (s)	T_2 (s)	T_3 (s)	Período (s)	Constante elástica (N/m)
0,058	924.30	924.00	924.50	$(0,9240 \pm 0,0001)$	2,68

0,068	989.90	989.60	991.80	$(0,9900 \pm 0,0007)$	2,74
0,078	1053.40	1052.10	1053.00	$(1,0520 \pm 0,0004)$	2,78
0,088	1113.00	1117.10	1116.30	$(1,115 \pm 0,001)$	2,79
0,098	1173.00	1171.90	1171.60	$(1,1720 \pm 0,0004)$	2,82
0,108	1220.80	1222.10	1220.70	$(1,2210 \pm 0,0004)$	2,86
0,118	1270.10	1272.00	1265.60	$(1,269 \pm 0,002)$	2.89

Nas seguintes tabelas (4.7) e (4.8), tem-se os dados experimentais, obtidos por meio do experimento manual, acerca das medidas dos períodos dos tempos de oscilação, assim como os valores das massas.

Tabela 4.7 – Valores experimentais dos tempos medidos, das distensões e das suas respectivas incertezas, nas medidas M1, M2, M3, M4 e M5.

Massa (kg)	σ_m (kg)	Tempo (s)					t_m (s)	σ_a (s)	σ_b (s)	σ_c (s)	Resultado de t (s)
		M1	M2	M3	M4	M5					
0,048	0,005	8,32	8,19	8,19	8,41	8,31	8,28	0,04	0,01	0,04	$(8,28 \pm 0,04)$
0,058	0,005	9,06	9,15	8,97	9,19	9,03	9,03	0,05	0,01	0,05	$(9,03 \pm 0,05)$
0,068	0,005	9,81	9,59	9,75	9,63	9,68	9,69	0,04	0,01	0,04	$(9,69 \pm 0,04)$
0,078	0,005	10,28	10,44	10,34	10,43	10,50	10,40	0,04	0,01	0,04	$(10,40 \pm 0,04)$
0,088	0,005	10,85	10,82	10,60	10,79	10,88	10,79	0,05	0,01	0,05	$(10,79 \pm 0,05)$
0,098	0,005	11,50	11,44	11,25	11,56	11,34	11,42	0,06	0,01	0,06	$(11,42 \pm 0,06)$
0,108	0,005	11,81	11,93	11,87	11,85	11,93	11,88	0,02	0,01	0,02	$(11,88 \pm 0,02)$
0,118	0,005	12,29	12,50	12,46	12,37	12,54	12,43	0,05	0,01	0,05	$(12,43 \pm 0,05)$
0,128	0,005	13,00	12,72	12,97	12,94	12,97	12,92	0,05	0,01	0,05	$(12,92 \pm 0,05)$
0,138	0,005	13,31	13,56	13,56	13,41	13,31	13,43	0,06	0,01	0,06	$(13,43 \pm 0,06)$
0,148	0,005	13,56	13,87	13,87	13,82	13,82	13,77	0,06	0,01	0,06	$(13,77 \pm 0,06)$

Tabela 4.8 - valores das massas, dos períodos dos tempos de oscilação e suas incertezas.

Massa (kg)	T (s)	σ_T (s)	Resultado de T(s)
0,048	0,828	0,004	$(0,828 \pm 0,004)$
0,058	0,903	0,005	$(0,903 \pm 0,005)$
0,068	0,969	0,004	$(0,969 \pm 0,004)$

0,078	1,040	0,004	(1,040 ± 0,004)
0,088	1,079	0,005	(1,079 ± 0,005)
0,098	1,142	0,006	(1,142 ± 0,006)
0,108	1,188	0,002	(1,188 ± 0,002)
0,118	1,243	0,005	(1,243 ± 0,005)
0,128	1,292	0,005	(1,292 ± 0,005)
0,138	1,343	0,006	(1,343 ± 0,006)
0,148	1,377	0,006	(1,377 ± 0,006)

O valor de t (média) é dado pela seguinte expressão:

$$t = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad (4.7)$$

sendo X_i os valores medidos e n o número de aferição feitas.

A incerteza do tipo σ_a é dado pela equação:

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4.8)$$

Sendo que o desvio padrão da média σ é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - t)^2}{n-1}} \quad (4.9)$$

A incerteza tipo σ_b é considerada somente como incerteza do instrumento, temos que:

$$\sigma_b = \sigma_{instrumento} \quad (4.10)$$

A incerteza do instrumento analógico é dada pela seguinte equação:

$$\sigma_{instrumento} = \frac{\text{menor divisão do instrumento}}{2} \quad (4.11)$$

A incerteza de instrumentos digitais é dada pela menor divisão do instrumento, isto é:

$$\sigma_{instrumento} = \text{menor divisão do instrumento} \quad (4.12)$$

A incerteza combinada σ_c é dada por:

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2} \quad (4.13)$$

Neste presente trabalho, para cada uma das massas adicionadas no suporte de massa conectado à mola, foi cronometrado o tempo de dez oscilações. Portanto, o período (T) é dado pela seguinte equação:

$$T = \frac{1}{10}t \quad (4.14)$$

A incerteza do período foi obtida a partir da propagação de incerteza, uma vez que o período equivale a um décimo do tempo medido para dez oscilações. Dessa forma, segue que a incerteza do período é calculada a partir da seguinte fórmula:

$$\sigma_T = \sqrt{\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{10}t \right) \sigma_t \right]^2} \quad (4.15)$$

Sendo a incerteza do tempo σ_t igual à incerteza combinada σ_c . Após executar a derivada, de modo que:

$$\sigma_T = \frac{1}{10} \sigma_t \quad (4.16)$$

A partir das equações especificadas em cima, foram preenchidas as tabelas 4.2, 4.3, 4.7 e 4.8.

Com os valores do período e das massas, contidos na tabela 4.8, foi gerado um gráfico do período em função da massa, por meio o software *SciDAVis*.

O período é dado pela seguinte fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.17)$$

Na eq. (4.17), ao substituir T por Y e, m por X, obtemos a seguinte expressão:

$$Y = 2\pi \sqrt{\frac{X}{k}} \quad (4.18)$$

Aplicando a eq. (4.18) como ajuste no gráfico do período em função da massa, tem-se o gráfico representado na figura 20.

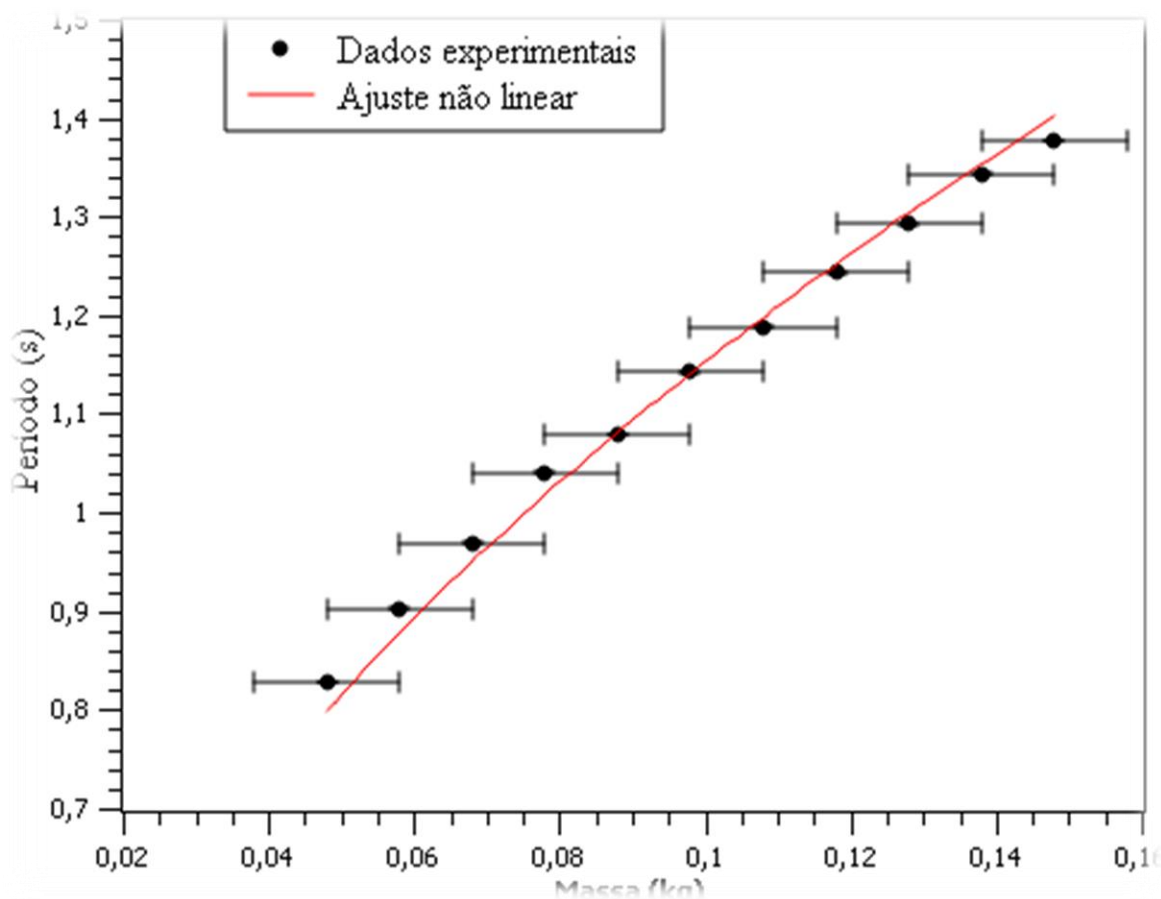


Figura 20 – Comportamento do período de oscilação versus as massas.

Na figura 20, ilustramos os resultados experimentais dos períodos de oscilação do sistema massa-mola em função da massa. Cujo gráfico apresenta um comportamento linear não-linear. E através do mesmo, obtive-se o resultado para a constante elástica e sua incerteza, dado por $(2,97 \pm 0,03)$ N/m.

Na tabela 4.9, mostra-se os resultados dos valores ao quadrado dos períodos dos tempos de oscilação com suas respectivas incertezas e também os valores das respectivas massas.

Tabela 4.9 - valores das massas, dos períodos dos tempos de oscilação e suas incertezas.

Massa (kg)	T^2 (s)	σ_{T^2} (s)	Resultado de T(s)
0,048	0,686	0,004	$(0,828 \pm 0,004)$

0,058	0,815	0,005	(0,903 ± 0,005)
0,068	0,939	0,004	(0,969 ± 0,004)
0,078	1,082	0,004	(1,040 ± 0,004)
0,088	1,164	0,005	(1,079 ± 0,005)
0,098	1,304	0,006	(1,142 ± 0,006)
0,108	1,411	0,002	(1,188 ± 0,002)
0,118	1,545	0,005	(1,243 ± 0,005)
0,128	1,669	0,005	(1,292 ± 0,005)
0,138	1,804	0,006	(1,343 ± 0,006)
0,148	1,896	0,006	(1,377 ± 0,006)

Quanto à expressão do período ao quadrado é dado pela seguinte equação:

$$T^2 = 4\pi^2\left(\frac{m}{K}\right) \quad (4.20)$$

Ao substituir T^2 por Y e, m por X, na eq. (4.20) obtemos:

$$Y = 4\pi^2\left(\frac{X}{K}\right) \quad (4.21)$$

Agora, aplicando a eq. (4.21) como ajuste no gráfico do período ao quadrado em função da massa, obtive-se o gráfico da figura 21, representado abaixo:

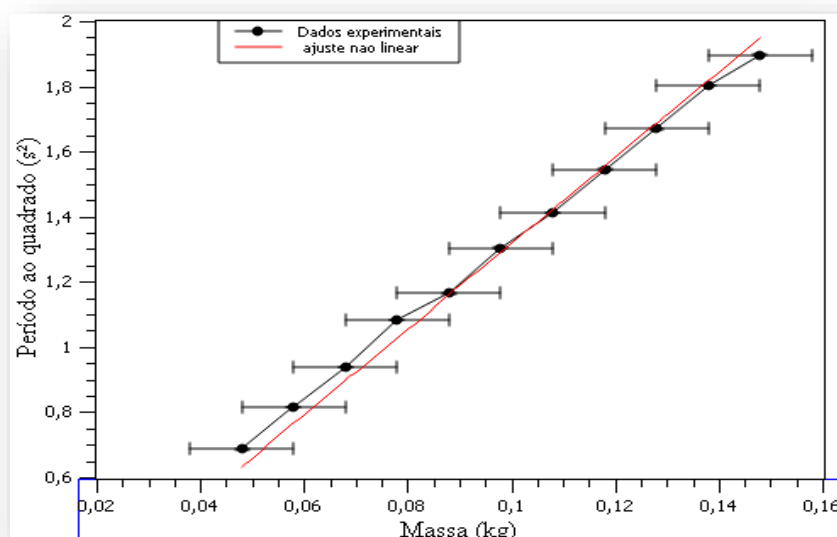


Figura 21 - Gráfico do período ao quadrado em função da massa

Na figura 21, ilustramos os resultados experimentais, através do gráfico que representa o período ao quadrado em função da massa, de um sistema massa-mola vertical. O mesmo apresenta um comportamento linear e por meio do ajuste, obtive-se o resultado da constante elástica dado por:

$$K = (2,99 \pm 0,03) \text{ N/m} \quad (4.22)$$

Na Tabela 4.10 se ilustram os valores das constantes elásticas da mola obtidos de quatro métodos diferentes e os seus respectivos erros relativos para a comparação.

Tabela 4.10 - valores da constante elástica da mola obtidos de quatro maneiras e os e erros relativos para a comparação.

	Resultados	Erros relativos
--	------------	-----------------

Constante elástica da mola automatizada	$(2,79 \pm 0,02) \text{ N/m}$	11,6 %
Constante elástica da mola manual (T)	$(2,97 \pm 0,03) \text{ N/m}$	18,8 %
Constante elástica manual (T^2)	$(2,99 \pm 0,03) \text{ N/m}$	19,6 %
Constante elástica da mola teórico	2,50 N/m	0 %

Na tabela 4.11, encontra-se os dados referentes às posições, bem como os seus correspondentes tempos de um sistema massa-mola vertical, gerados por meio do Arduino.

Tabela 4.11 – valores das posições ocupadas pelo sistema massa-mola, e seus respectivos tempos.

X (cm)	2,44	2,55	2,65	2,75	3,16	3,26	3,56	3,67	3,87	4,07	4,18	4,28
t (s)	3,23	3,27	5,13	8,59	7,34	4,44	6,89	11,34	12,36	5,51	3,37	3,43

A partir do software *Python* e dos dados dispostos na Tabela 4.11, plotou-se o gráfico da figura 22, no qual ilustra a superposição de dois gráficos, sendo que um representa o movimento amortecido do sistema massa mola vertical e o outro representa o movimento do mesmo sistema sem atrito.

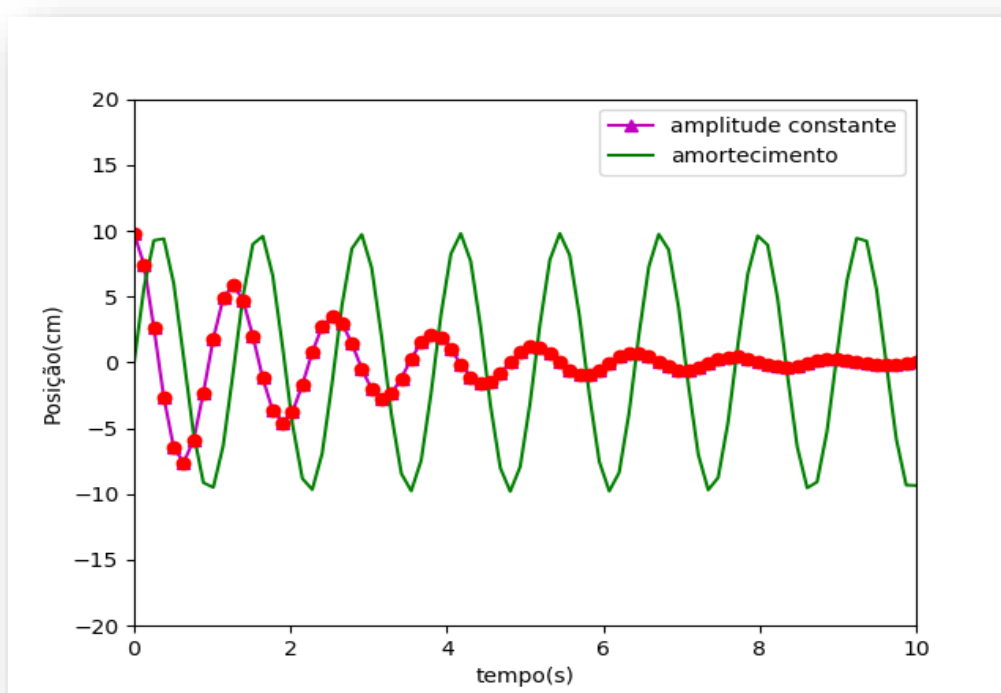


Figura 22 - Superposição do gráfico amortecido e não amortecido, do sistema massa-mola vertical.

4.2 Discussões

Na figura 18, tem-se a representação do gráfico da força versus deformação, gerado por meio dos dados coletados no Arduino, e dispostos na tabela 4.1. A partir dos dados das tabelas 4.2 e 4.3, plotou-se o gráfico descrito na figura 19, o mesmo foi gerado pelo programa SciDAVis, que relaciona a dependência da força (N) versus a deformação da mola (mm). Observou-se que tanto na figura 18, quanto na figura 19, os gráficos apresentam um comportamento linear entre a força e a deformação da mola, caracterizando assim uma reta, dessa forma, essas duas grandezas são proporcionais, obedecendo diretamente à lei de Hooke que determina a relação linear entre a força e a deformação sobre um corpo. O gráfico da figura 18, apresenta uma pequena dispersão na extremidade inferior, isso, certamente, foi devido a alguns fatores externos como, posicionamento incorreto do sensor em relação ao objeto, presença de objeto que estava próximo entre outros fatores. Na tabela 4.4, tem-se os valores referentes às medidas dos mínimos quadrados e, a partir dos mesmos, determinou-se os valores dos parâmetros, sendo que para a constante elástica da mola, encontrou-se o valor de $K = 3,08 \text{ N/m}$. Este valor é exatamente o mesmo que foi obtido através do método gráfico. Já para o parâmetro com resultado negativo, pode-se desprezá-lo já que são extrapolações da reta ajustada e, conseqüentemente não tem um sentido físico.

Na tabela 4.5, encontram-se os resultados, bem como os erros relativos dos mesmos, referentes ao primeiro procedimento experimental realizado de forma automatizada e manual. No experimento feito de forma automatizada foi encontrado o valor para constante elástica da mola de $2,85 \text{ N/m}$, cujo valor resultou no erro relativo de 14% em relação ao teórico. Enquanto, para o experimento realizado de maneira manual, encontrou-se o valor de $3,08 \text{ N/m}$ e, cujo valor resultou no erro relativo de 23% em relação ao teórico.

Analizando as tabelas 4.6, 4.7 e 4.8, nas quais estão os valores dos dados referentes aos períodos de tempos de oscilação, obtidos de forma automatizada e manual, respectivamente. Comparando esses valores, percebeu-se que com a assistência do Arduino, os períodos de tempos coletados se tornaram mais preciso. No entanto, os valores dos períodos de tempos obtidos por meio do experimento manual, variavam-se muito de uma tentativa para outra, ou seja, apresentou-se acentuadas flutuações, tornando o experimento manual insatisfatório.

No gráfico da figura 20, do período em função da massa, gerado pelo programa SciDAVis, nota-se que os pontos experimentais nas duas extremidades do gráfico, apresentam-se dispersos em relação ao gráfico do ajuste. Isso se deve a alguns fatores externos como o peso do suporte que sustenta as massas a mola, o tempo de vida da mola bem como o erro proveniente do operador.

No gráfico da figura 21, do período ao quadrado versus a massa, também gerado pelo programa SciDAVis, verifica-se também que os pontos experimentais estão dispersos, principalmente nas extremidades do gráfico. Essa flutuação dos pontos experimentais tem relação com fatores externos.

Analizando a tabela 4.10, na qual se encontram os resultados da constante elástica da mola, obtidos de quatro maneiras para comparação, percebe-se que ao comparar o valor da constante elástica da mola automatizada de $2,79 \text{ N/m}$ com o valor teórico de $2,50$, constatou, assim, um erro relativo de 11,6%, enquanto os valores das constantes elásticas da mola, obtidas de forma manual, foram $2,97 \text{ N/m}$ e $2,99 \text{ N/m}$, e com os respectivos erros relativos de 18,8% e 19,6% em relação ao valor constante elástica teórico.

A partir dos dados da tabela 4.11, foi possível gerar uma superposição de dois gráficos representados na figura 22, utilizando o software Python. Sendo que um representa o comportamento amortecido do sistema massa mola vertical, tal comportamento é por causa das forças externas que atuam no sistema em estudo. De modo que

sua amplitude decai com o passar do tempo. Já o outro representa um movimento desprovido de forças externas, cuja amplitude permanece constante com o passar do tempo.

Dessa forma, a partir das análises e das comparações entre os valores coletados referentes ao período bem como à constante elástica da mola, obtidos de maneira automatizada e manual, respectivamente. Pode-se perceber que com auxílio do Arduino, os tempos referentes aos períodos se tornaram mais precisos, o que não aconteceu ao realizar o experimento de forma manual, visto que os tempos dos períodos coletados variavam muito de uma tentativa a outra.

5 CONCLUSÕES

Com a análise dos dados coletados das tabelas e dos gráficos referentes ao experimento automatizado e manual. Comparando estes dados, pode-se perceber que com uso do Arduino, o tempo referente ao período se tornou mais preciso, ou seja, percebeu-se pouca variação entre os períodos bem como entre os valores da constante elástica da mola, o que não ocorreu ao realizar o experimento manualmente, pois o tempo acerca do período variou muito de uma tentativa para outra.

No gráfico da figura 22, notou-se que o movimento oscilatório do sistema massa-mola vertical, apresentou-se um comportamento oscilatório amortecido, isso se deve ao fato do sistema está submetido às forças externas amortecedoras, em que as mesmas transformam as energias responsáveis pelo movimento do sistema em calor.

Com análise dos dados coletados de três formas diferentes, pode-se afirmar que o presente trabalho conseguiu, efetivamente, alcançar seus propósitos de verificar a lei *Hooke*, além disso, de encontrar de forma mais precisa os valores referentes aos períodos, bem como os da constante elástica da mola de um sistema massa-mola, utilizando diferentes massas. Algumas discrepâncias foram notadas, devido possivelmente a fatores externos como a resistência do ar, a falha do operador, basicamente, devido à negligência em posicionar corretamente o centro do suporte de massa em relação ao sensor no ângulo de 90° e de efeito de interferência destrutiva, gerado pela refração e reverberação. E também a limitação do sensor ultrassônico na coleta do tempo. Para tanto, entre as possíveis melhorias sugere-se a utilização de um sensor infravermelho. No mais, o presente trabalho atingiu resultados muito satisfatórios para o escopo do mesmo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARDUINO. Disponível em: <https://www.arduino.cc/en/Main/ArduinoBoardUno>. Acesso em: 15 janeiro de 2020.

BONJORNO, J. R., BONJORNO, R. A., BONJORNO, V., RAMOS, C. M. *Física Fundamental*. Volume Único. São Paulo. Ed. FTD. 1999.

GUTIÉRREZ-VEGA, J.; CHÁVEZ-CERDA, S.; RODRÍGUEZ-DAGNINO, Ramón. Free oscillations in an elliptic membrane. *Revista Mexicana de Física*, Mexico, v. 6, n.45, p.613-622, dez. 1999.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; E. WALKER, J. *Fundamentos da Física: Mecânica*. V. 1. 4a.Ed.- Rio de Janeiro: Livros Tecnicos e Cientificos.pp.138-139, 1996.

ITEAD STUDIO. Ultrasonic Ranging Module HC-SR04. Disponível em: . Acesso em: 14 maio 2017.

J. A. LEYVA-CRUZ; SANTANA, R. G.; FERREIRA, E. S.; Ávila-Paz, J.; HERNANDEZ, L. H. Q.; Estrada-Gutiérrez, J. C; Cano, E. M. Determining the gravitational effects on tide height on an estuary and theoretical comparisons. REVISTA MEXICANA DE FÍSICA, v. 65, p. 489-495, 2019.
<http://dx.doi.org/10.31349/revmexfis.65.489>

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. Mecânica. São Paulo: Hemus, 1970. 235 p.

MARTINAZZO, C. A.; TRENTIN, D. S.; FERRARI, D.; PIAIA, M.M. Arduino: Uma Tecnologia no Ensino de Física. PERSPECTIVA, Erechim. v. 38, n.143, p. 21-30, setembro/2014.

Mecânica Clássica R. Symon: tradução de Gilson Brand Bastista. Rio de Janeiro, Campus 1998.

Física II : Termodinâmica e Ondas/Young e Freedman ; [colaborador A. Lewis Ford]: tradução Cláudia Santana Martins : revisão técnica Adir Moysés Luis. – 12. ed. – São Paulo: Addison Wesley, 2008.

APÊNDICE A: CÓDIGO EM C PARA CONTROLAR O SENSOR PARA DETERMINAR A CONSTANTE ELÁSTICA.

/*

Osvando Silva

Data: 14/02/2020

*/

```
#include <Ultrasonic.h> //Biblioteca usada para usar o sensor ultrassônico
#define TRIGGER_PIN 8 //Pino de trigger do sensor
#define ECHO_PIN 7 //Pino de resposta do sensor
#define P_INICIAL 48.5 // Distância entre o sensor e a base da massa em comprimento natural
#define M 0.058 // Massa do corpo
#define g 9.81 // Aceleração local da gravidade

Ultrasonic ultrasonic(TRIGGER_PIN, ECHO_PIN); //Configuração inicial do sensor

void setup()
{
  Serial.begin(9600); //iniciando a comunicação serial
}

void loop()
{
  double media = 0; //Variável usada para determinar o valor da variação do comprimento
  double cmMsec; //Variável para receber o valor do sensor
  long microsec = ultrasonic.timing();
  cmMsec = ultrasonic.convert(microsec, Ultrasonic::CM) - 1.5; //Recebimento do comprimento em CM
  media = (P_INICIAL - cmMsec) / 100; //Conversão para metro

  Serial.print("varL - ");
  Serial.print(media, 5);
  Serial.print(",k ");
  Serial.println((m * g/media , 5); //CALCULO DA GRAVIDADE
  delay(1000); //DEFINE 1 CICLO POR SEGUNDO
}
```

APÊNDICE B: CÓDIGO DO PERÍODO E DA CONSTANTE ELÁSTICA DA MOLA.

```

/*
  Osvando Silva
  Data: 13/02/2020
*/

#include <Ultrasonic.h> //Biblioteca do sensor ultrasonico
#include <math.h> //Biblioteca para calculos matemáticos
#define pino_trigger 8 //Pino de trigger do sensor
#define pino_echo 7 //Pino de resposta do sensor
int amostras_iniciais = 0; //Variavel usada para identificar os primeiros pulsos e ignora-los devido a
variação anormal dos valores
int amostras_totais = 0; //Variavel usada para armazenar a quantidade total de pulsos realizados
bool finalizacao = false; //Variavel que determina o inicio e finalização do experimento
float media = 0; //Variavel usada para obter a média do periodo
bool iniciar = false; //Variavel utilizada para informar ao arduino o inicio da contagem
float m = 0.128; //<-----MASSA
int cont = 0; //Variavel usada para contagem de pulsos
float tempo; //Variavel usada para o calculo do periodo
float tempo1; //Variavel usada para o calculo do periodo
float tempo2; //Variavel usada para o calculo do periodo
float EQL = 0; //Variavel usada para armazenar o ponto de equilibrio
//-----
float K(float periodo, float massa) { //Função criada para calcular o K
  float a;
  float b;
  a = 4 * (3.1415 * 3.1415) * massa;
  b = a / (periodo * periodo);

  return b; //Retorno do resultado
}
//-----
Ultrasonic ultrasonic(pino_trigger, pino_echo); //Definição da biblioteca do sensor ultrasonico
void setup() {
  pinMode(2, INPUT); //Configuração do botão de controle
  Serial.begin(9600); //Inicio da comunicação serial
  Serial.println("SISTEMA MASSA-MOLA - por Osvando Silva");
  Serial.println();

```

```
Serial.println("Pressione S1 para configurar o ponto de equilibrio.");
Serial.println();
}

void loop() {
  float mmMsec; //Variável para aquisição da posição
  long microsec = ultrasonic.timing();
  mmMsec = ultrasonic.convert(microsec, Ultrasonic::CM); //Aquisição dos dados do sensor
  if (EQL == 0) { //Determina que se o ponto de equilibrio não tiver sido definida, será necessário
configurar primeiramente
    if (digitalRead(2) == HIGH) { //Quando o botão é pressionado, o arduino registra a posição atual da
massa para determinar a trajetória da oscilação
      EQL = mmMsec;
      Serial.print("Ponto definido! - ");
      Serial.print(EQL);
      Serial.println("cm");
      Serial.println();
      Serial.println("Mova a massa para o ponto de disparo e pressione S1 para iniciar a contagem.");
      Serial.println("Após pressionar, solte a massa e aguarde enquanto os dados são coletados.");
      delay(300);
    }
    } else if (EQL != 0 && iniciar == false) { // Após o ponto de equilibrio ser definido, o arduino entra em
modo de espera, para que a massa seja posicionada
    if (digitalRead(2) == HIGH) {
      iniciar = true; //Neste momento, o clique do botão informa para o arduino, através da variável, que o
sistema já pode iniciar a contagem.
      Serial.println();
      Serial.println("SISTEMA INICIADO!");
      Serial.println();
      delay(200);
    }
    } else if (iniciar == true) { //A aquisição de dados será iniciada após a configuração do ponto de equilibrio
    tempo = millis();
    if (mmMsec < (EQL + 0.3) && mmMsec > (EQL - 0.3)) { //Devido a flutuação dos valores de posição
fornecidos pelo sensor, é necessário criar uma tolerancia, neste caso de + ou - 0.3mm
    if (cont == 0) {
      tempo1 = millis();
      cont = 1;
      delay(220);
```

```

    }
    else if (mmMsec < 31 && cont == 1) {
        cont = 2;
        delay(220);
    }
    else if (cont == 2) {
        tempo2 = millis();
        cont = 3;
        Serial.print(" ");
        amostras_iniciais++;
        if (amostras_iniciais > 4) { //O sistema ignora as 4 primeiras contagens para poder ter a
confiabilidade desejada
            amostras_totais++;
            if (amostras_totais > 10) { //Quando o sistema identifica que já foram captadas as 10 ondas
necessárias, a contagem é encerrada
                finalizacao = true;
            }
        }
        if (finalizacao == false && amostras_iniciais > 4) {
            media = media + (tempo2 - tempo1); //A variavel para armazenar o valor das 10 amostras
        }
        if (finalizacao == true) {
            //Serial.print(" - ");
            Serial.print(m);
            Serial.print("\t");
            Serial.print(media / 10); // média é tirada a partir das 10 oscilações
            Serial.print("\t");
            Serial.println(K(((media / 10) / 1000), m)); //O programa finaliza, o valor de K
            while (1) {} //Entra em modo de loop para aguardar a reconexão
        }
        cont = 0;
    }
}
}
}
}

```

APÊNDICE C: CÓDIGO DAS MEDIDAS DOS TEMPOS E DAS POSIÇÕES.

```
// Leitura HC-SR04
const uint8_t trig_pin = 10;
const uint8_t echo_pin = 9;

uint32_t print_timer;

void setup() {
  Serial.begin(9600); // Habilita Comunicação Serial a uma taxa de 9600 bauds.

  // Configuração do estado inicial dos pinos Trig e Echo.
  pinMode(trig_pin, OUTPUT);
  pinMode(echo_pin, INPUT);
  digitalWrite(trig_pin, LOW);
}

void loop() {
  // Espera 0,5s (500ms) entre medições.
  if (millis() - print_timer > 500) {
    print_timer = millis();

    // Pulso de 5V por pelo menos 10us para iniciar medição.
    digitalWrite(trig_pin, HIGH);
    delayMicroseconds(11);
    digitalWrite(trig_pin, LOW);
    /* Mede quanto tempo o pino de echo ficou no estado alto, ou seja,
    o tempo de propagação da onda. */
    uint32_t pulse_time = pulseIn(echo_pin, HIGH);
    /* A distância entre o sensor ultrassom e o objeto será proporcional a velocidade
    do som no meio e a metade do tempo de propagação. Para o ar na
    temperatura ambiente Vsom = 0,0343 cm/us. */
    double distance = 0.01715 * pulse_time;
    // Imprimimos o valor na porta serial;
    Serial.print(distance);
    Serial.println(" cm");
  }
}
```