Caderno de Física da UEFS
https://doi.org/10.13102/cad.fs.uefs.v22i01.11579
Cad. Fís. UEFS, 22(01):1406.1-11, **2024**
ARTIGO DE PESQUISA

Possibilidades da utilização do modelo de *Lotka-Volterra* para a promoção de analogias interdisciplinares

Possibilities of using the Lotka-Volterra model to promote interdisciplinary analogies

Cesar Dalmolin

Núcleo de Estudo e Pesquisa em Educação Tecnológica (NEPET), Universidade Federal de Santa Catarina-SC, Brasil. E-mail: cesar.saxon@gmail.com

Resumo: Este trabalho tem como assunto principal o Modelo de *Lotka-Volterra*. Esse modelo está relacionado com a modelagem matemática, especificamente, aquela que se refere à interação entre duas espécies, sendo uma denominada por presa e a outra por predador. As equações descritas neste trabalho estão embasadas nas equações descritas por Alfred J. Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940) e, por convenção, essas equações representam o que chamamos de "Modelo de Lotka-Volterra" ou "sistema predador-presa". Na primeira parte do trabalho é apresentado o desenvolvimento matemático do modelo, bem como uma interpretação qualitativa sobre ele. Esta base será necessária para compreender a segunda parte, na qual é aplicada por meio de analogias e/ou metáforas para tratar de cenários que vão além do contexto biológico o qual foi criado. Dessa forma, o modelo se apresenta como uma ferramenta alternativa que permite o debate das seguintes questões sociais: 1. Ciclo de pobreza e desigualdade de renda; 2. Consumo excessivo e degradação ambiental; 3. Conflitos entre grupos étnicos ou religiosos e; 4. Desafios da migração e superpopulação. Em decorrência, surge a possibilidade de vincular o tratamento a outros aspectos do conhecimento com estudantes de diferentes níveis de aprendizagem.

Palavras-Chaves: modelo de *Lotka-Volterra*; modelo presa-predador; educação; questões sociais; interdisciplinaridade

Abstract: The main subject of this paper is the Lotka-Volterra Model. This model is related to mathematical modeling, specifically, that which refers to the interaction between two species, one called prey and the other predator. The equations described in this paper are based on the equations described by Alfred J. Lotka (1880-1949) and Vito Volterra (1860-1940) and, by convention, these equations represent what we call the "Lotka-Volterra Model" or "predator-prey system". The first part of the paper presents the mathematical development of the model, as well as a qualitative interpretation of it. This basis will be necessary to understand the second part, in which it is applied through analogies and/or metaphors to address scenarios that go beyond the biological context in which it was created. Thus, the model presents itself as an alternative tool that allows the debate of the following social issues: 1. Cycle of poverty and income inequality; 2. Excessive consumption and environmental degradation; 3. Conflicts between ethnic or religious groups; and 4. Challenges of migration and overpopulation. As a result, the possibility of linking treatment to other aspects of knowledge with students at different learning levels arises.

Keywords: Lotka-Volterra model; predator-prey model; education; social issues; interdisciplinarity

Citação: Cesar Dalmolin. Possibilidades da utilização do modelo de *Lotka-Volterra* para a promoção de analogias interdisciplinares. Cad. Fís. UEFS, 22(01):1406.1-11, 2024.

Recebido: 10/05/2024
Aceito: 21/05/2024
Publicado: 11/06/2024

1. Introdução

O homem faz parte e interage o tempo todo com a natureza, ambiente este que envolve com fenômenos naturais nos mais diversos contextos, tornando a compreensão destes fundamentais para as vidas humanas, auxiliando na resolução de problemas cotidianos como, por exemplo, prever o tempo, reconhecer anomalias em ecossistemas e conhecer impactos da ação humana no meio ambiente. Para isto, há uma demanda de um entendimento solido sobre as ciências naturais.

Uma possibilidade para procurar uma compreensão de fenômenos naturais ocorre através de ferramentas como a modelagem matemática, que consiste em identificar as características fundamentais do sistema a ser estudado, de maneira que seja possível obter um conjunto de regras matemáticas da qual possibilite extrair informação úteis. Existem diferentes abordagens na modelagem de um sistema, mas, uma vez estabelecido o modelo, é necessário resolver as equações associadas a ele para extrair a informação desejada.

Neste trabalho será apresentado as equações de *Lotka-Volterra*, ou equações predador-presa como são conhecidas, a partir de problemas do tipo predador-presa que podem ser solucionados pelo uso de um modelo, representado por equações diferenciais. Após esse momento o modelo será apresentado como uma ferramenta alternativa que permite analogias para o debate de questões sociais, promovendo um vínculo para o tratamento de outros aspectos do conhecimento com estudantes de diferentes níveis de aprendizagem.

Conhecidos também como sistemas predador-presa, estes modelos podem representar qualquer relacionamento entre espécies onde notoriamente a população de uma espécie (predador) determina a abundância de outra (presa). Apesar de haver uma lógica bastante simples, sistemas predador-presa podem apresentar comportamentos que variam entre a ordem e o caos. Esta característica faz com que elas se enquadrem em uma classe de problemas denominada sistemas complexos.

Em um breve histórico, o modelo possui desenvolvimento com o biofísico Alfred James Lotka (1880-1949) e o matemático Vito Volterra (1860-1940) que propuseram em 1925 e 1926, respectivamente e individualmente, modelos que serviram de base para os modelos matemáticos posteriores utilizados para descrever a interação entre espécies, mais especificamente de populações entre presas e predadores. Este modelo foi denominado Lotka-Volterra.

Em meados da década de 1920, o biólogo marinho italiano, Umberto D'Ancona, desenvolveu uma análise estatística com dados sobre as capturas no mar Adriático, entre 1910 e 1923. Durante a Primeira Guerra Mundial (1914 a 1918) a pesca havia sido suspensa em parte neste mar, o que possibilitou ao biólogo mostrar que houve aumento da frequência relativa de certas espécies e redução da frequência relativa de outras espécies (Sobrinho et al, 2019; Dantas, 2005).

Os dados mostravam que a frequência de predadores, como tubarões, aumentara durante os anos de guerra e posteriormente diminuíra com o aumento da pesca. A abundância relativa das presas, por outro lado, seguira um padrão inverso. Umberto D´Ancona estava noivo de Luisa Volterra, uma ecologista, filha de Vito Volterra, um famoso matemático. D´Ancona propôs a questão para Vito Volterra, que veio a escrever um par simples de equações diferenciais para descrever o comportamento observado.

Simultaneamente, o químico e matemático Alfred Lotka desenvolveu em 1910 um modelo para descrever reações autocatalíticos, nas quais as concentrações dos elementos químicos oscilavam, um processo semelhante àquele que ocorre com populações em competição. Seus resultados se assemelharam à equação logística derivada por Pierre François Verhulst. Em 1920, Lotka estendeu o modelo de "sistemas orgânicos", tomando por exemplo uma espécie de planta e uma espécie animal herbívoro e, em 1925, resumindo seu trabalho anterior e organizando suas ideias, utilizou as equações para analisar as interações predador-presa em seu livro *Elements of Physical Biology* (1925).

A partir do modelo, então chamado Lotka-Volterra, uma nova forma de avaliar e explicar as interações entre populações de presas e predadores foi possível. Veremos que estes modelos tomam a forma de um par de equações diferenciais acopladas. Cabe destacar que no contexto de dinâmica de populações, o modelo descreve sistemas em que uma das espécies é predadora da outra, a presa, que se alimenta de outro tipo de comida.

Na primeira parte desse trabalho o modelo considerado envolve apenas duas espécies, uma espécie denominada presa e a outra predadora, não descrevendo completamente as relações observadas na natureza, ponto este que também facilita a interpretação da dinâmica das populações. Como exemplos de situações que retratam um sistema presa-predador (em sistema isolado) incluem coelhos e lobos, peixes e tubarões, pulgões e joaninhas e bactérias e amebas. Já na segunda parte do trabalho, passo por meio de analogias a tratar de outros cenários em que o modelo de *Lotka-Volterra* pode ser aplicado. Conforme será exemplificado, esses cenários tratam de situações que envolvem questões de diferentes áreas, como as sociais, ambientais e econômicas, promovendo a interdisciplinaridade quando proposto a ser trabalhado em sala de aula.

2. Modelo de *Lotka-Volterra*

As equações de Lotka-Volterra retratam um sistema de presa-predador de duas espécies, na qual uma delas, a presa ou o predador, influenciará na abundância da outra. Devido à interação entre as espécies, basicamente podem ocorrer três situações (Dantas, 2005):

1. Apenas predadores são extintos;
2. Presas são extintas e, consequentemente, predadores também;
3. coexistência de presas e predadores.

Seja a população de predador denotada por $L = L(t)$ (usando L de lobos) e a população de presas por $C = C(t)$ (usando C de coelhos) no instante t (usando t para tempo). Ao modelar matematicamente a interação entre as duas espécies, são assumidas algumas hipóteses (Boyce; DiPrima, 2010, p. 413):

1. Ausência de predador, $L = 0$, implica que a população de presas aumentará a uma taxa proporcional à população atual sem nenhum tipo de obstáculo, ou seja, com um temo da forma $[a.C(t)]$. Portanto, se $L = 0$, $dC/dt = a.C$, onde a é uma constante positiva e representa a taxa de crescimento efetiva da população de presas na ausência de predadores.

2. Na carência de presas, $C = 0$, acarretada, devido à falta de alimentação, a extinção da população de predadores a uma taxa proporcional à população atual. Esta situação pode ser descrita por um termo da forma $[-cL(t)]$. Dessa forma, se $C = 0$, $dL/dt = -c.L$, onde c é uma constante positiva e representa a taxa de morte dos predadores na ausência de presas.

3. Considerando que o número de encontros entre as duas espécies é proporcional ao produto das populações de cada espécie, representamos por $L(t).C(t)$. Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas. Assim, a taxa de crescimento da população de predadores, dL/dt, é aumentada por um termo da forma $[+\gamma.L(t).C(t)]$, enquanto a taxa de crescimento da população de presas, dC/dt, é diminuída por um termo da forma $[-\alpha.L(t).C(t)]$, onde α e γ são constantes positivas e são medidas do efeito da interação entre as duas espécies.

Em decorrência dessa modelagem matemática, o seguinte sistema de equações diferenciais é chamado de equações de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} &equação\ de\ presa: \quad \frac{dC}{dt} = a.C - \alpha.C.L = C.(a - \alpha.L) \\ &equação\ de\ predador: \quad \frac{dL}{dt} = -c.L + \gamma.C.L = L.(-c + \gamma.L) \end{aligned} \tag{1}$$

Recordando que um modelo envolvendo apenas duas espécies não pode descrever completamente as relações complexas que ocorrem, de fato, na natureza. Além disso, cabe salientar que a presa possui um suprimento ilimitado de alimento e se reproduz exponencialmente, representado pelo termo $a.C$ na equação presa, a menos que esteja sujeita a predação. Quando tomando C ou L igual a zero, fica visível que a predação não pode ocorrer. Nesta mesma equação, é possível interpretar que a variação do número de presas é igual ao aumento proporcional à população atual menos a destruição pelos predadores.

Na equação predador, o primeiro termo representa a taxa de perca dos predadores devido à morte natural ou à emigração, levando uma decadência exponencial na ausência de presas, enquanto ao segundo termo, embora similar com a taxa de predação mas diferente pela constante, a taxa com a qual a população de predadores cresce não é necessariamente igual a taxa com que ela consome a presa. É possível interpretar essa equação como a variação do número de predadores igual ao aumento causado pela alimentação disponível menos a morte na ausência de presas. As constantes presentes nas equações podem ser modificadas para adaptar as equações para diversas condições ambientais, por exemplo, a possibilidade de modelar matematicamente os efeitos da variação de temperatura do ambiente, fator este que influencia na taxa de crescimento de populações.

Concluído a construção do modelo, é factível a extração de informações do mesmo. Uma alternativa seria resolver as equações diferenciais encontrando um par de funções $C(t)$ e $L(t)$, que descreve as populações de presas e predadores como funções do tempo, através de uma solução numérica, por exemplo. É possível, contudo, usar métodos gráficos para analisar as equações.

A solução do sistema de equações de Lotka-Volterra pode ser feita através dos pontos de equilíbrio. Tais pontos são obtidos quando sua variação é nula. Para este desenvolvimento, a representação para as presas será pela letra x e os predadores pela letra y, equivalente respectivamente à C e L usadas anteriormente.

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = 0 \;\; \rightarrow x = 0 \;\; ou \;\; y = \frac{a}{\alpha}$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = 0 \;\; \rightarrow y = 0 \;\; ou \;\; x = \frac{c}{\gamma} \tag{2}$$

As soluções de (2) fornecem os pontos de equilíbrio, ou seja, os pontos (0,0) e $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$. Em seguida será analisada a dinâmica do sistema em torno de cada um desses pontos de equilíbrio, o que permitirá conclusões a respeito da estabilidade do sistema predador-presa.

Para iniciar, o sistema linear correspondente próximo do ponto (0,0), desprezando os termos não lineares

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

O sistema linearizado (4) apresenta os autovalores $r_{1,2}$ e autovetores $\xi_{1,2}$ abaixo.

$$r_1 = a\,, \qquad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\; e \;\; r_2 = -c\,, \qquad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

De modo que sua solução geral seja da forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\xi^1 e^{r_1 t} + C_2\xi^2 e^{r_2 t} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct} \tag{5}$$

Ou ainda, $x(t) = C_1.e^{at}$ e $y(t) = C_2.e^{-ct}$.

As populações na vizinhança desse ponto de equilíbrio podem ser descritas tanto pelo sistema não linear (1) tanto como pelo sistema linear (3). Neste sistema (3), os autovalores têm sinais contrários, neste caso, (0,0) é um ponto do tipo sela para estes sistemas citados e também um ponto de equilíbrio instável.

A próxima etapa consiste em analisar o segundo ponto de equilíbrio, definido por $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$. Para encontra o sistema linear correspondente ao sistema não linear (1), realiza-se uma mudança de variável (translação):

$$x = \frac{c}{\gamma} + u \quad e \quad y = \frac{a}{\alpha} + v \tag{6}$$

Substituindo as equações (6) no sistema (1) e desprezando os termos não lineares encontramos o sistema linear correspondente.

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\alpha.c}{\gamma} \\ \frac{\gamma.a}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{7}$$

Os autovalores do sistema (8) são

$$\det\begin{pmatrix} 0 - r & \frac{-\alpha.c}{\gamma} \\ \frac{\gamma.a}{\alpha} & 0 - r \end{pmatrix} = 0 \qquad r^2 + a.c = 0 \rightarrow \begin{cases} r = -i\sqrt{a.c} \\ r = +i\sqrt{a.c} \end{cases} \tag{8}$$

Estes autovalores representam um sistema linear qual o ponto crítico é um centro (estável).

As soluções reais do sistema (7) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} u(t) = K\frac{c}{\gamma}\cos\left(\sqrt{a.c}.t + \emptyset\right) \\ v(t) = K\frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}}sen\left(\sqrt{a.c}.t + \emptyset\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c}{\gamma} + K\frac{c}{\gamma}\cos\left(\sqrt{a.c.}\,t + \emptyset\right) \\ y(t) = \frac{a}{\alpha} + K\frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}}sen\left(\sqrt{a.c.}\,t + \emptyset\right) \end{cases} \tag{9}$$

Onde K e $\emptyset$ são constantes determinadas pelas condições iniciais. Essas equações são boas aproximações para as trajetórias próximas do ponto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$. É possível retirar algumas conclusões, como por exemplo, a variação do tamanho da população de presas e predadores variam de forma senoidal com período $2\pi\sqrt{a.c}$.

Retomando para o sistema (7), as trajetórias desse sistema podem ser encontradas fazendo:

$$\frac{du}{dv} = \frac{-\frac{\alpha.c}{\gamma}.v}{\frac{\gamma.a}{\alpha}.u} \quad \rightarrow \quad \gamma^2.a.u\frac{du}{dv} = -\alpha^2.c.v$$

Integrando em ambos os lados e integrando

$$\int a.u.du = -\int \alpha^2.c.v.dv \quad \rightarrow \quad \gamma^2.a.u^2 + \alpha^2 c.v^2 = K$$

$$\frac{u^2}{\frac{k}{\gamma^2.a}} + \frac{v^2}{\frac{k}{\alpha^2.c}} = 1 \tag{10}$$

Da equação (10), na qual k é uma constante de integração não-negativa, representa elipses em torno do ponto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$, que é um ponto de equilíbrio chamado centro, pois fica no centro das trajetórias elípticas, logo é estável, conforme já indiciado pelos autovalores em (8). As trajetórias fechadas em torno do ponto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$, descrevem o ciclo ecológico, discussão essa que será apresentada adiante.

Voltando rapidamente ao primeiro sistema, as equações de Lotka-Volterra, existe a possibilidade de reduzir a uma única equação. Se tomar a equação (2) e dividir pela equação (1), pois sendo separáveis, é possível escrevê-las como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + \gamma.x)}{x(a - \alpha.y)}$$

A resolução ocorre da seguinte maneira:

$$\int \frac{(a - \alpha.y)}{y}dy = \int \frac{(-c + \gamma.x)}{x}dx$$

que integrada fornece a família de soluções do sistema não linear (1), ou seja,

$$\ln y - \alpha.y + c.\ln x - \gamma.x = H \tag{11}$$

No qual H é uma constante arbitrária de integração. A equação acima (11) é uma relação que deve ser obedecida por todas as soluções do sistema de Lotka-Volterra. Mesmo não resolvendo a equação (11) explicitamente é possível mostrar que o seu gráfico é uma curva fechada, para H fixo, em torno do ponto de equilíbrio $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$. As populações de predadores e presas exibem uma variação cíclica, como pode ser conferido na Figura 1 e Figura 2 (Stewart, 2014, p. 564).

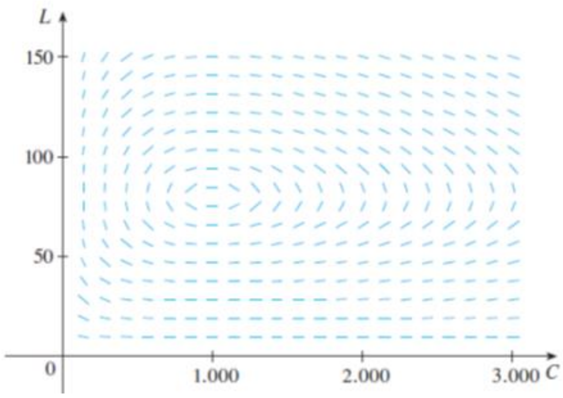

Figura 1. Campo de direções para o sistema predador-presa. Fonte: Stewart, 2014, p. 564.

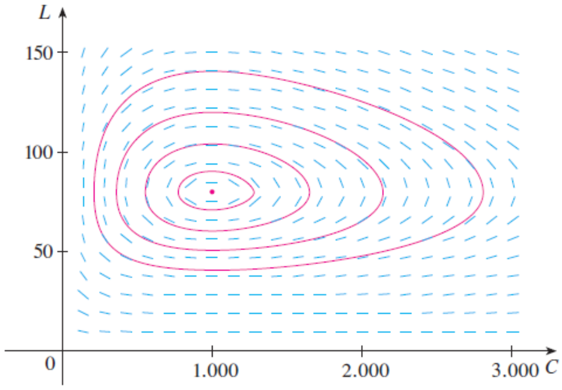

Figura 2. Retrato de fase do sistema. Ambas as Figuras 1 e 2 são representações da variação cíclica das populações descritas pelo modelo de Lotka-Volterra para as condições iniciais a = 0,08, α = 0,001, c = 0,02 e = 0,00002. L representa os predadores (lobos) e C as presas (coelhos). A solução de equilíbrio, e que está dentro das demais soluções, equivale a L = 80 e C = 1000, as demais curvas representam outras soluções que correspondem a valores diferentes de H. Fonte: Stewart, 2014, p. 564.

Se um movimento ocorrer ao longo de uma curva solução, é possível visualizar como a relação entre C e L muda com o passar do tempo: o número de presas oscila periodicamente no tempo, o de predadores também. Para algumas condições iniciais, a trajetória representa pequenas variações em x e y em torno do ponto crítico e tem uma forma quase elíptica, como sugere o sistema linear. Para outras condições iniciais, as variações em x e y são mais pronunciadas e a forma da trajetória é ligeiramente diferente de uma elipse. As trajetórias são percorridas no sentido trigonométrico.

É possível representar o comportamento de presas, x(t) ou C(t) e de predadores, y(t) ou L(t), em função do tempo. Para facilitar a comparação, na Figura 3, foram desenhadas as curvas correspondentes às condições da Figura 1 e Figura 2. Nota-se que estão sobre o mesmo eixo, porém em escalas diferentes.

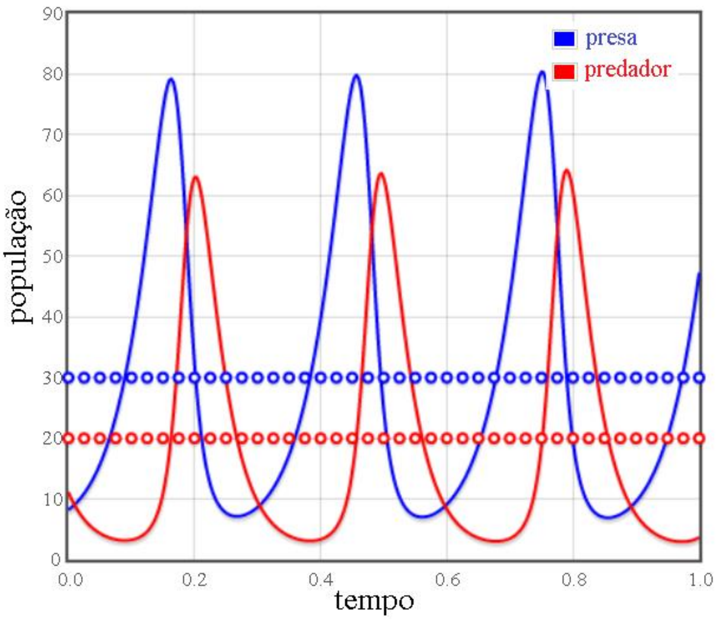

Figura 3. Comparação entre a população de lobos e coelhos em função do tempo, utilizando o modelo de Lotka-Volterra. Exibe o comportamento qualitativo essencial do modelo - sua natureza "flutuante". Essas "flutuações" ou oscilações, são inerentes a um sistema da vida real. As curvas representam as populações de presa e predadores, azul e vermelho respectivamente. Parâmetros: a = 20, c = 30, α = γ = 1. Fonte: O autor.

É possível notar no gráfico da Figura 3 a periodicidade de C e L possuem em função do tempo, já que são trajetórias fechadas. Além disso, a oscilação da população predadora vem depois da oscilação de presas.

Começando em um estado no qual ambas as populações, de lobos e coelhos, são relativamente pequenas, então a população de coelhos tem uma oportunidade de crescer, já que há poucos lobos que capturam menos coelhos do que novos coelhos nascem. Como consequência, a população de lobos, com comida abundante, suficiente para suportar uma prole, eventualmente começa a aumentar também, atingindo o máximo suportado pelo sistema. Isso eleva a caça, pois os coelhos passam a ter dificuldade para evitá-los e sua população começa a declinar. A população de lobos logo seguirá, porque a diminuição da abundância de alimento causará fome em massa. Retorna a condição do ecossistema ao estado com poucas presas e poucos predadores, assim a população de presas voltará a crescer. Desta maneira a história se repetirá, conforme apresentada de maneira gráfica na Figura 4.

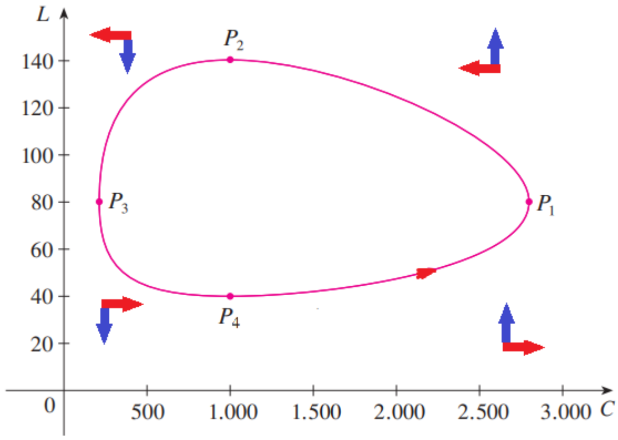

Figura 4. Gráfico para a condição dC/dt > 0, em sentido anti-horário. Sendo a seta azul representando a população de lobos (L) e, em vermelho, a população de coelhos (C).

Retomando as equações em (9), é possível associar ao gráfico da Figura 3 e perceber que as populações de presas e predadores estão defasadas por um quarto de ciclo, sendo que o número de presas aumenta primeiro para posteriormente o número de predadores aumentar, conforme explicação acima. As amplitudes de oscilação dependem das condições iniciais, sendo $K\frac{c}{\gamma}$ para a população de presas e $K\frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}}$ para a de predadores. Por último, as populações médias de predadores e de presas correspondem à população de equilíbrio, ou seja, a população média de presas é a/α e a de predadores c/γ.

Conforme as figuras apresentam, estas são oscilações típicas de populações descritas pelo modelo de Lotka-Volterra, as quais independem dos valores escolhidos para os parâmetros a, c, α e γ. Variações desse tipo nas populações de presas e predadores são observados na natureza, embora muitos sistemas desse tipo apresentam outros tipos de comportamentos, além do comportamento oscilatório. Por exemplo, observam-se sistemas que evoluem para populações assintoticamente estáveis ou sistemas em que populações se extinguem.

É possível retirar da equação de Lotka-Volterra o seguinte: apesar de ser um modelo simplificado da dinâmica de predadores e presas, ele captura uma feição geral, que é a existência de oscilações, ou em outras palavras, de periodicidade. No mundo real, verdadeiras interações ocorrem em cadeias de muitas espécies que têm relações de predação, competição e simbiose. Em suma, as equações de Lotka-Volterra são antes um ponto de partida do que um ponto de chegada na construção de modelos matemáticos envolvendo predação.

Os modelos predador-presa desenvolvidos por Lotka e Volterra vêm sendo aprimorados, com a inserção de parâmetros relevantes a cada tipo de estudo. Atualmente são usados em várias áreas do conhecimento, tais como em ciências biológicas e agrárias no controle biológico de pragas; em ciências econômicas para descrever as flutuações/oscilações em bolsas de valores e no estudo de competições de mercados; em ciências ambientais para descrever, por exemplo, a captura e emissão de carbono; em telecomunicações para analisar a competição entre sistemas analógico e digital; entre outras aplicações.

3. Analogias para abordagens interdisciplinares

Embora as relações entre as espécies na realidade são muitas vezes complexas e sutis, é possível a construção de sistemas simples, como no caso apresentado, por meio de duas equações diferenciais para descrever tais situações. O modelo de Lotka-Volterra, talvez o mais antigo dos modelos presa-predador, apesar da sua simplicidade, apresenta características interessantes e pode ser utilizado para introduzir as ideias básicas da modelagem em ecossistemas. Partindo do entendimento de modelos mais simples, um passo pode ser dado à compreensão de outros sistemas mais complicados.

Ao trabalhar com equações diferenciais, originadas, por exemplo, devido ao processo de modelagem de alguns fenômenos que esteja sendo estudado, nem sempre é possível encontrar uma fórmula explícita para a solução de uma equação diferencial. Por outro lado, abordagens gráficas e numéricas fornecem informações necessárias, conforme pode ser notado por meio da Figura 4.

Conforme descrito, o modelo de Lotka-Volterra, desde o início teve uma aproximação com contextos ecológicos, como a descrição de população lobos e coelhos, peixes e tubarões, pulgões e joaninhas, bactérias e amebas, moscas e sapos, sapos e crocodilos etc. Por outro lado, a aplicação do modelo pode ser aplicada a outros contextos devido à sua simplicidade e versatilidade, de modo a ser uma das razões para a adaptação bem-sucedida à outras áreas decorrentes da sua capacidade de transferir com sucesso a sua intuição biológica original, sem necessariamente ser disparatado.

A título de exemplos realizados por meio de analogias ou metáforas, há a verificação da interação entre a produção excessiva de dióxido de carbono pela ação humano (por exemplo pela atividade de desmatamento e uso de combustíveis fósseis como petróleo e carvão para obtenção de energia) e o seu consumo por vegetais (Brito, 2019); em 1967, Richard M. Goodwin, um matemático e economista americano, adaptou o modelo de Lotka-Volterra à teoria econômica, inaugurando a utilização de modelos populacionais advindos da biologia na teoria econômica. O trabalho de Goodwin se resume a um modelo endógeno de crescimento econômico, onde as taxas de crescimento são determinadas pela dinâmica entre o nível de emprego e a distribuição de renda (Gandolfo, 2008). Em outras palavras, pode ser dito que nesta analogia econômica da relação presa-predador, a participação dos salários na renda agregada é o predador, sendo que se eleva conforme maior for o nível de emprego, ou seja, quando a taxa de empregos estiver crescendo, é natural que os salários da economia tendam a amentar, pois a mão-de-obra se torna mais escassa. Em vista disso, o nível de emprego é a presa, pois a elevação da participação dos salários na renda suprime os lucros e diminui a acumulação, o crescimento, impactando no nível de emprego (Taylor, 2004). Assim, na medida em que os salários aumentam demais, isso tende a aumentar o desemprego, pois a mão-de-obra se torna muito cara (Schuetz et al, 2020).

Retornando ao contexto ecológico, o modelo de Lotka-Volterra pode ser aplicado para discutir problemas ambientais causados pelo consumo excessivo. O consumo excessivo e a degradação ambiental são questões sociais e ambientais interligadas que podem ser analisadas por meio do modelo de Lotka-Volterra. Nesse caso, a população de predadores representa a demanda insustentável por recursos naturais, enquanto a população de presas simboliza os recursos naturais esgotáveis, como florestas, água potável ou ar limpo. A relação entre esses dois grupos pode fornecer ideias sobre as consequências do consumo desenfreado, como no caso em que o aumento da demanda por recursos sem uma gestão adequada pode levar à degradação do meio ambiente e ao colapso dos ecossistemas.

Da mesma forma os predadores dependem das presas para sobreviver, a demanda humana por recursos naturais é impulsionada por necessidades e desejos. No entanto, se a demanda por recursos não for gerenciada de forma adequada, pode ocorrer um desequilíbrio prejudicial para o meio ambiente. À medida que a demanda insustentável por recursos (população de predadores) cresce, ocorre uma maior exploração dos recursos naturais esgotáveis (população de presas). A extração excessiva de recursos gera efeitos como o desmatamento desenfreado, a poluição da água e emissões de gases de efeito estufa – inclusive, em um contexto mais abrangente, contribuem para as mudanças climáticas -, coloca pressão sobre os ecossistemas. Essa sobre-exploração pode levar à degradação do meio ambiente, ao esgotamento de recursos e à perda de biodiversidade.

Da mesma forma, assim como a população de presas é afetada pelo aumento da população de predadores, os recursos naturais também sofrem com a demanda insustentável. A degradação ambiental causada pelo consumo excessivo pode resultar em desequilíbrios ecológicos, como a diminuição de habitats naturais, a contaminação de ecossistemas aquáticos e a deterioração da qualidade do ar. Esses impactos negativos têm consequências diretas na saúde humana, no bem-estar das comunidades e na sustentabilidade do planeta. Pensando na exploração sustentável de recursos naturais que envolva o comportamento dinâmico de um ecossistema em função da ação humana pode garantir a preservação dos recursos explorados, determinando níveis seguros de extrativismo e garantindo a capacidade da Natureza em resistir à interferência humana (Cunha, Pagando, 2020).

Portanto, o modelo de Lotka-Volterra fornece uma perspectiva útil para entender os problemas associados ao consumo excessivo e à degradação ambiental. Ele destaca a importância de adotar práticas de consumo sustentável, conservação dos recursos naturais e implementação de estratégias de gestão ambiental para garantir um equilíbrio saudável entre a demanda humana e a capacidade dos ecossistemas de fornecer recursos de forma sustentável.

Um cenário envolvendo diretamente questões sociais condiz aos conflitos entre grupos étnicos ou religiosos, como a interação de religiões locais e religiões oficiais (Cunha, Pagando, 2020). Neste contexto, a se olhar com base no modelo de Lotka-Volterra, as interações entre as populações (diferentes grupos ou comunidades) podem ser comparadas à competição por recursos escassos, poder, influência política, oportunidades econômicas ou mesmo território. O crescimento de um grupo pode ser limitado pela presença do outro, levando a um ciclo de conflito e tensão social.

Sem haver determinantes para qual grupo é a presa ou o predador, nesse contexto de tensões étnicas ou religiosas, a presença de um grupo pode limitar o crescimento ou a expansão do outro, assim como o crescimento da população de presas é limitado pela predação exercida pelos predadores. Nesta situação, à medida que um grupo expande sua influência, recursos ou poder, pode afetar negativamente o outro grupo, levando a uma reação e uma tentativa de retaliação ou defesa. Esse ciclo de conflito pode continuar enquanto os grupos envolvidos não encontrarem uma maneira de conviver pacificamente ou de resolver suas diferenças.

Além disso, assim como no modelo de Lotka-Volterra, a presença de um grupo dominante pode causar a supressão ou marginalização do outro grupo, levando a desigualdades sociais, injustiças e a perpetuação de um ciclo de conflitos, caso o ponto de equilíbrio seja alcançado, a interação proporcionará uma realidade social de harmonia entre os grupos (Hidayati, Kurniawan, 2021). Convém ressaltar que além do modelo não considerar uma gama de fatores – ou seja, possui suas limitações -, neste caso dos conflitos entre grupos étnicos ou religiosos, contém elementos que os tornam complexos e multifacetados, influenciados por uma série de fatores históricos, culturais, socioeconômicos e políticos. O modelo de Lotka-Volterra oferece uma analogia útil para compreender as dinâmicas de competição e limitação mútua entre os grupos, mas é necessário ter cautela ao aplicar esse modelo a situações reais, considerando a riqueza de variáveis e fatores envolvidos nos conflitos sociais, o mesmo sendo válido para o próximo caso.

Outro cenário condiz aos desafios e questões ligadas à migração e superpopulação. O modelo de Lotka-Volterra possibilita analisar os desafios relacionados à migração e superpopulação, assim como no modelo presa-predador, onde a população de presas é afetada pelo aumento da população de predadores. Afim de detalhar, considere duas regiões geográficas povoadas, mas que ocorra uma migração. A população que se desloca de uma região para a outra é dita como "predador", de modo que a população que "recebe" esta população é a "presa". Tais denominações para cada grupo é devido ao fato de que a migração em massa pode ser vista como uma pressão exercida pela população migrante sobre os recursos disponíveis, a infraestrutura (como sobrecarga no sistema de saúde e escassez de moradia) e a coesão social da região receptora, criando desafios para ambas as populações (como aumento do desemprego) e afetando o equilíbrio entre elas, podendo experimentar níveis mais altos de conflitos dentro da sociedade, como guerras (Apkarian et al, 2023).

Essa dinâmica de interação entre a população de migrantes e a população local cria um desafio para o equilíbrio entre ambas as populações e para a gestão dos recursos disponíveis. Estratégias adequadas de planejamento urbano, políticas migratórias, investimentos em infraestrutura e programas de integração podem desempenhar um papel importante na busca por soluções sustentáveis e na promoção da coexistência harmoniosa entre as populações.

É pertinente ter em vista que à medida que uma população cresce, requer mais recursos do que podem estar prontamente disponíveis, pressionando a população como um todo, fazendo com que ela emigre, o que reduz o tamanho da população, podendo atingir um tamanho administrável. Por outro lado, se muita migração ocorrer com muita frequência, as terras ao redor podem ser preenchidas, tornando difícil (ou mesmo impossível) essa alternativa.

4. Considerações finais

Conforme apresentado, o modelo de Lotka-Volterra surge para compreender sistemas ecológicos. Mesmo que exista um tratamento construído a partir de equações diferenciais, uma análise qualitativa do modelo (como por meio da Figura 4 e dos contextos discutidos) permite que, feita a devida transposição didática, seja apresentado a diferentes modalidades de ensino. Conforme as analogias feitas diante os exemplos trazidos, é possível perceber que o modelo possui um potencial que perpassa o cenário biológico e que podem ser úteis durante uma aula para o tratamento de problemas e questões sociais.

Convém lembrar que a Ciência não se faz desvinculada da sociedade e devemos tratar (ou ao menos mencionar) esses temas com nossos alunos que, inclusive, apontam para a crescente necessidade da ação interdisciplinar na solução de problemas. Neste sentido, as soluções de problemas não se restringem apenas às questões técnicas, mas são dependentes também de questões políticas, sociais, ambientais, de vontades individuais, de corporações etc (Bazoo, Pereira, 2017). Em suma, o técnico é importante e desse pode desencadear alternativas para tratar de aspectos humanos.

Por meio dos exemplos envolvidos, a discussão desses permite uma abordagem interdisciplinar, possibilitando a integração de conceitos e ferramentas de diferentes áreas para analisar e questões sociais. Estas, por sua vez, podem se apresentar complexas, mesmo que o modelo busque pela simplificação. Porém, há de se considerar que os problemas sociais e ambientais são multifacetados e envolver uma variedade de fatores interligados. Os modelos e analogias, como o de Lotka-Volterra, ajudam a simplificar e visualizar alguns aspectos desses problemas, mas é importante reconhecer a complexidade real dessas questões.

Quanto a isso, é possível evidenciar nas situações como as interações humanas, entre elas o consumo excessivo, os conflitos étnicos e religiosos e a migração em massa, podem ter efeitos significativos na sustentabilidade ambiental e nas dinâmicas sociais. Isso ressalta a necessidade de considerar cuidadosamente as implicações das ações humanas em relação aos recursos naturais (como a conservação dos recursos naturais) e à coexistência social (como justiça social e coexistência pacífica).

Esses apontamentos podem ser aplicados em aulas para promover uma compreensão mais ampla dos desafios sociais e ambientais enfrentados pela sociedade atual. Os professores podem utilizar essas ideias como ponto de partida para discussões, atividades de grupo, estudos de caso e projetos que incentivem os alunos a refletirem sobre as questões, buscar soluções criativas e desenvolver uma consciência crítica sobre o impacto de suas ações no mundo ao seu redor.

Além disso, a abordagem interdisciplinar pode ser destacada, incentivando os alunos a explorarem diferentes campos de conhecimento, como ecologia, sociologia, economia e política, para obter uma visão mais holística dos problemas sociais e ambientais e incentivar uma mentalidade de colaboração para a busca de soluções sustentáveis.

Referências

APKARIAN, J., FLETCHER, J., HANNEMAN, R. A., INOUE, H., LAWRENCE, K., & CHASE-DUNN, C. The Human Demographic Regulator. Disponível em: https://irows.ucr.edu/papers/irows41/irows41.htm. Acesso em 28 de maio de 2023.

BAZZO, W. A; PEREIRA, L. T. do V. Introdução à engenharia: conceitos, ferramentas e comportamentos. 4. ed. rev. – Florianópolis: Editora da UFSC, 2017.

BOYCE, W. E.; DiPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2010, p. 413 – 418.

BRITO, H. C. de. Aplicação do modelo matemático predador-presa de Lotka-Volterra no consumo do gás carbônico atmosférico por árvores na cidade de Ipatinga/MG. Teófilo Otoni – MG. 152 f. [Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Tecnologia, Ambiente e Sociedade)], Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, 2019.

CUNHA, F. B; PAGANO, D. J. Modelo de Lotka-Volterra sob exploração sustentada: análise da estabilidade global via teoria de bifurcações. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~biomat/Bio11_art29.pdf. Acesso em 28 de maio de 2023.

DANTAS, M. P. Seleção Natural Espontânea em Sistemas Presa-Predador com Difusão. Lavras – MG. 65 f. [Monografia (Graduação em Ciência da Computação)], Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais - UFLA, 2005, p. 27-28.

GANDOLFO, G. Giuseppe palomba and the lotka-volterra equations. Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali, v. 19, p. 347–357, 2008.

HIDAYATI, T.; KURNIAWAN, W. Stability Analysis of Lotka-Volterra Model in The Case of Interaction of Local Religion and Official Religion. International Journal of Educational Research and Social Sciences (IJERSC), v. 2, n. 3, p. 542-546, 2021.

SCHUETZ, D.; OLIVEIRA, R.; PLINIO, J.; Simulações numéricas do modelo de Goodwin. Anais do Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão, v. 6, n. 2, 14 fev. 2020.

SOBRINHO, A. S. de O.; OLIVEIRA, C. F; KITA, C. M.; NATTI, E. R. T; NATTI, P. L. Modelagem Matemática e Estabilidade de Sistemas Predador-Presa. In: OLIVEIRA, A. C. DE (Ed.). A Produção do Conhecimento nas Ciências Exatas e da Terra 2. Belo Horizonte: Atena Editora, 2019. Disponível em: https://www.atenaeditora.com.br/catalogo/post/modelagem-matematica-e-estabilidade-de-sistemas-predador-presa. Acesso em 25 de maio de 2023.

STEWART, J. Cálculo – Volume II. São Paulo: Cengage Learning, 2013, p. 563 – 570.

TAYLOR, L. Reconstructing macroeconomics: structuralist proposals and critiques of the mainstream. Cambridge, Mass: Harvard University Press, 2004.