

Caracterização das variações espectrais da nota Lá no violino: influências timbrísticas do pianíssimo

Marcela Jesus Silva¹, Pedro Javier Gómez Jaime²

¹Graduada em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana

E-mail: marcelajesussilva20@gmail.com

²Departamento de Ciência Exatas e Naturais-DCEN, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

- Itapetinga

E-mail: pedro.jaime@uesb.edu.br

RESUMO

Discutir relações matemáticas e físicas ligadas à música resulta controverso para alguns, pois é comum se questionarem, como é possível que tais disciplinas científicas possam estar associadas a uma arte que nos suscita estados emocionais diversos. Esta pesquisa tem como objetivo caracterizar desde o ponto de vista físico-matemático o timbre da nota Lá nas quatro cordas do violino, executado na dinâmica do pianíssimo. Para a obtenção dos espectros que possibilitaram a caracterização timbrística do Lá foi utilizado o Origin 6, de forma a processar tais trechos sonoros a partir da Transformada Rápida de Fourier (FFT) o que permite enquadrar este estudo numa pesquisa de natureza quantitativa. Obteve-se para o caso da terceira corda uma anomalia que contradiz a teoria, uma vez que o harmônico com maior amplitude foi o quinto. Assim mesmo, conseguimos comprovar, nas condições em que se realizou o estudo, que o timbre da nota Lá nessa mesma corda é o mais rico enquanto ao número de harmônicos presentes.

Palavras-chave: Timbre; FFT; Espectros; Nota Lá; Violino; Pianíssimo.

ABSTRACT

To discuss about mathematical and physical relationships linked to music is controversial to many people, 'cause frequently themselves asking, how is possible that these scientific disciplines can be associated to an art that provokes diverse emotional states. This research aim to characterize from the physical and mathematical point of view the timbre of the note La on the four strings of the violin, played on the pianíssimo dynamics. To obtain the spectrals that allows the timbrical characterization of the La was used the Origin 6, with the objective to processing these sound streeches from the Fourier Fast Transformed (FFT) wich allow us classify this research as quantitative approach. In the third string there was an amomaly that contradicts the theory, because the fifth harmonic

was the greatest amplitude. Therefore, we were able to prove, in our conditions, that the timbre of the La note on the same string is the richest at number of present harmonics.

Keywords: Timbre; FFT; Espectral; La Note; Violin; Pianissimo

INTRODUÇÃO

Os conhecimentos científicos surgiram e surgem, em princípio, a partir da necessidade humana perante uma demanda objetiva. Assim, revestida da curiosidade humana, esta cria ou tem um elo com a subjetividade dos indivíduos. Dessa forma, a observação e a experimentação constituem-se em etapas que permitem o nosso acesso a uma compreensão cada vez mais detalhada do mundo, em toda a sua extensão. Através dos sentidos, somos atingidos por milhares de informações relativas aos fenômenos que nos cercam diariamente. Em um início, quando reflete-se sobre a relação entre a Matemática, a Física e a Música, resulta rotinário que a primeira ideia, usualmente emitida por interlocutores, seja que as duas primeiras disciplinas não guardam nenhum tipo de vínculo com essa "arte-ciência". Isto porque costumeiramente e de maneira pouco complexa, estabelecemos um campo de abstração limitado ao ponto de nos impedir fazermos uma leitura crítica da natureza.

Enxergar o mundo ao nosso redor de maneira crítica, cética e reflexiva não é um ato que façamos com frequência sob o olhar daquelas ciências. Enquanto isso, a música permanece ao alcance das massas sendo percebida, na maioria das vezes, como essa manifestação da arte destinada a mexer de maneira transcendente com os nossos afetos.

Segundo afirma Bromberg (BROMBERG, 2012), atualmente quando se fala da relação entre a Matemática e a Música, parte-se de um ponto que envolve o elo entre uma ciência e uma arte. Isto, segundo a nossa impressão, para um número bastante restrito de interessados, mesmo que estes convivam no ambiente acadêmico. Entretanto, o que nos é apresentado durante a história da evolução musical é a presença constante da Matemática e da Física, no que refere-se à origem da interconexão dessas áreas do saber. Nesse sentido, Abdounur (2003) ressalta que o início dessa interação perde-se na noite dos tempos.

A interação entre essas áreas tornou-se intensa a partir da necessidade de equacionar e solucionar problemas relacionados às consonâncias, buscando fundamentos científicos para justificar a beleza musical, com a inclusão da Física e da Matemática no intuito de resolver problemas de dissonância musical. Os estudos preliminares do uso da Matemática na Música estão relacionados aos Pitagóricos, sendo a eles atribuído o primeiro estudo científico da música e seus intervalos de frequências através do Monocórdio. Mas já desde tempos predecessores a essa simbiose vislumbrada por Pitágoras e seus discípulos, a mú-

sica se fazia presente na história da humanidade. Nas primeiras aglomerações sociais, nas tribos, nos rituais de adoração aos Deuses, onde os tambores rústicos feitos com madeira e pele de animais conseguiam induzir afetos como o medo, serenidade, alegria, tristeza e outras emoções, as quais fugiam da racionalidade; em um período histórico onde a forma de comunicação era rudimentar e limitada à Música (SILVA, GROENWALD, 2018).

Atualmente essa manifestação artística continua a ser objeto de estudos entre diversos pesquisadores. Neste artigo apresentamos outra perspectiva de estudo com a qual procuramos caracterizar, tendo em vista a Transformada Rápida de Fourier (FFT), os componentes harmônicos relativos à nota Lá (A4 e A5) emitida sob a dinâmica do pianíssimo(pp) nas cordas do violino. Assim contemplamos como hipóteses da pesquisa que tendo em vista a complexidade timbrística, espectros relativos à nota Lá emitida no pianíssimo terão configurações diferentes na distribuição de seus harmônicos. Isto porque acreditamos que além da influência timbrística que os elementos que compõem o violino possam oferecer, fatores subjetivos referentes à ação do executante contribuem na sonoridade que nos atinge. Contudo, devemos reconhecer a persistência das nossas ideias vindas do senso comum (indutivistas) regidas pelos nossos órgãos sensoriais. Nesse sentido, podemos explicitar que por momentos nos invadiram pensamos relacionados à possibilidade de encontrarmos similaridades evidentes nas estruturas dos espectros resultados das FFTs. Isto porque estaríamos aplicando o mesmo tratamento à mesma frequência e/ou harmônica (no caso do A5), dessa forma não nos era totalmente desprezível considerarmos essa possibilidade. Vale ressaltar que esta não se verificou durante o estudo o que reforça, mais uma vez, a carência de linearidade dos fenômenos relativos ao comportamento sonoro dos instrumentos musicais e em particular ao timbre.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Série de Fourier

A Série de Fourier é descrita, segundo Figueiredo (1997), como uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, descrita segundo a expressão

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

onde, o somatório deve ser visto como convergência de séries. Se a série de Fourier converge para uma função, isso significa que a função pode ser aproximada pela soma das componentes harmônicas.

No contexto do problema de valor inicial e de fronteira para a equação da onda em

uma corda vibrante, a série de Fourier pode ser utilizada para representar a forma inicial da corda e as condições de contorno. Se a série de Fourier converge, isso sugere que a função que descreve a posição da corda pode ser representada de maneira eficaz pela soma dessas funções harmônicas.

Suponhamos que a série convirja uniformemente, então a função f deve ser contínua (LIMA, 2014). Então, iremos obter os coeficientes a_0 , a_n e b_n a partir da função dada, pois como afirma Figueiredo (1997), os coeficientes estão ligados à função f . Desta forma, integrando ambos os lados da equação no intervalo $[-L, L]$ em x , assim temos:

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Como

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

Devido ao fato de serem duas a duas ortogonais no intervalo $-L, L$ para o produto interno do espaço vetorial das funções contínuas, definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x) \cdot g(x) dx$$

temos,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

Para os demais coeficientes, serão exploradas as ideias de relações de ortogonalidade expostas por Figueiredo (1997):

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1;$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m; m \geq 1; \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m; m \geq 1; \end{cases}$$

Para encontrar os coeficientes a_n , retornamos à expressão multiplicando por $\cos(\frac{m\pi x}{L})$ e integramos (formalmente) no intervalo $[L, L]$. Daí,

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right) \end{aligned}$$

Pelas relações de ortogonalidades vista anteriormente, temos que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se } n \neq m; m \geq 1; \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Retomando a expressão, resta apenas

$$\int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \cdot L$$

ou seja,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n \geq 0;$$

Para encontrar os coeficientes b_n , retornamos à expressão, multiplicamos por $\operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})$ e integramos (formalmente) no intervalo $[L, L]$. Pelo processo análogo encontramos:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n \geq 1;$$

De acordo com Figueiredo (1997), o requisito da integrabilidade de f é necessária para que as equações tenham sentido, além de que a condição de f ser absolutamente

integrável é suficiente, mas não necessária para que a equação inicial convirja.

É possível também representarmos a Série de Fourier na sua forma complexa, através da fórmula de Euler e suas derivadas, isto é:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

A partir delas, podemos obter

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{a_n \cdot e^{i\frac{n\pi x}{L}}}{2} + \frac{a_n \cdot e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2} + \frac{b_n \cdot e^{i\frac{n\pi x}{L}}}{2i} - \frac{b_n \cdot e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}$$

$$= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}$$

Tomando o coeficiente c_n ¹ como

$$c_n = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right)$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx$$

Segundo Figueiredo (1997), se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então a forma complexa da série de Fourier pode ser escrita como:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}.$$

¹Também chamados de coeficientes de Fourier complexos.

Transformada de Fourier

A partir das equações, como visto anteriormente, a Série de Fourier pode ser dada em sua forma complexa como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx e^{i \frac{n\pi x}{L}}.$$

Tomando $\xi_n = \frac{n\pi}{L}$, temos que $L = \frac{n\pi}{\xi_n}$. Ao substituindo na equação, teremos:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-\frac{n\pi}{\xi_n}}^{\frac{n\pi}{\xi_n}} f(x) e^{-i \xi_n x} dx e^{i \xi_n x} \frac{\xi_n}{2n\pi}.$$

Podemos notar que o somatório acima possui um caráter semelhante a uma integral imprópria de $-\infty$ até ∞ , basta que consideramos a expressão $\frac{\xi_n}{n} d\xi$, fazendo $\xi_n = \xi$ e $n \longleftrightarrow \infty$ pois conforme n tende para infinito, essa razão se comporta de maneira semelhante ao elemento diferencial $d\xi$ na integral. A ideia por trás dessa substituição é que, quando lidamos com somatórios que envolvem limites que se assemelham a integrais impróprias, podemos usar ferramentas e técnicas do cálculo integral para simplificar o problema. Isso é especialmente útil quando se lida com séries que têm uma forma mais suave e contínua, semelhante a funções integráveis.

Assim, seria conveniente que a função f satisfaça,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i \xi x} dx e^{i \xi x} \frac{1}{2\pi} d\xi.$$

A equação acima é chamada de Teorema da Integral de Fourier.

Teorema .1 *Seja $f(x)$ uma função tal que $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em qualquer intervalo finito. E que $f(x)$ é absolutamente integrável no intervalo $(-\infty, \infty)$. Então, o teorema da integral de Fourier afirma que a Equação é válida.*

As formas equivalentes da mesma integral de Fourier são:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i \xi (x-u)} du d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \xi (x-u)} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i \xi u} du \end{aligned}$$

Dessa forma, as funções

$$c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

e

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi)e^{i\xi x} d\xi$$

são denominadas, respectivamente, a análise de Fourier (ou transformada de Fourier) e síntese de Fourier (ou transformada inversa de Fourier). Segundo Chang (2016), objetivando uma análise discreta dos harmônicos e dos coeficientes de uma função f periódica de período $2L$, prefere-se optar por uma adequação mais razoável da transformada de Fourier. Sendo ela,

$$c(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left(\int_{-n}^n f(x) \cos(\xi x) dx + i \int_{-n}^n f(x) \sin(\xi x) dx \right)$$

A Transformada de Fourier é uma ferramenta matemática fundamental utilizada na análise de sinais e sistemas em domínio de frequência. Ela permite decompor um sinal no domínio do tempo em suas componentes de frequência. A sua Análise de sinais permite analisar a composição de frequências de um sinal, revelando quais frequências estão presentes e com que intensidade, ou seja, a Transformada de Fourier é usada para representar os dados de maneira mais eficiente no domínio da frequência. Sendo útil para identificar as frequências predominantes nos áudios de cada instrumento específico.

No contexto deste trabalho utiliza-se a Transformada de Fourier, para a análise dos dados coletados. Sendo possível através dela observamos quão intensa é a frequência relativa à nota Lá. Isto refere-se à maior amplitude do espectro (atingida pela fundamental segundo a teoria) e/ou, ocasionalmente, por algum dos harmônicos que o compõem nas quatro cordas do violino. A maneira de sintetizar o até aqui exposto as FFTs obtidas mostram a relação entre as intensidades dos harmônicos presentes com seus correspondentes valores de frequências.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT) é um algoritmo eficiente para calcular a Transformada de Fourier Discreta (DFT) de uma sequência de dados. A DFT é uma ferramenta matemática que converte um sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência, decompondo-o em suas componentes sinusoidais. A FFT é uma abordagem otimizada para realizar essa transformação de forma mais rápida do que os métodos tradicionais. O algoritmo FFT divide o problema em subproblemas menores, usando a propriedade da periodicidade das funções seno e cosseno. Essa abordagem divide e permite uma redução significativa na quantidade de operações necessárias para calcular a transformada.

Formas de Ataque da Corda

Quando discute-se sobre o timbre instrumental é necessário ressaltar a dependência que este atributo tem tanto com a forma do instrumento em questão e o material com que foi feito, quanto com a maneira como o mesmo é executado. Este último fator que influencia timbricamente a sua sonoridade é conhecido como: forma de ataque. Nesse sentido, Jaime (2016) salienta que os instrumentos de cordas podem ser percutidos (piano), tangidos (violão, cravo, harpa, violino, viola, e baixo em pizzicato) ou ainda friccionados por um arco (quarteto de cordas executados normalmente).

Por sua parte, Figueiredo (1977) afirma que o problema da equação da onda unidimensional conhecido como um problema de valores iniciais e de fronteira, como segue abaixo, possuem casos especiais, como as vibrações de um harpa ou um cravo, onde a corda é deslocada e depois solta para começar sua vibração (dedilhada). Outro caso é o das cordas do piano, onde em estado repouso estas são percutidas (marteladas) por um golpe de martelo. Também existem os casos em que a corda é friccionada por um arco, como é o caso do violino e o violoncelo. Nevada (2002) relata que a posição do ataque é um dos fatores mais importantes para a diferenciação de timbres em instrumentos.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \text{em } \mathfrak{R},$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0$$

$$y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L,$$

está equação representa a propagação de uma onda mecânica em uma corda de comprimento L com suas extremidades fixas, onde \mathfrak{R} designa a semi faixa $(x, y) \in \mathbb{R}; 0 < x < L, t \geq 0$.

No caso da forma de ataque do Piano, cada tecla do piano está conectada a uma ou várias cordas que são tensionadas quando você pressiona uma tecla, ela move um martelo que atinge as cordas, fazendo com que elas vibrem. A frequência das vibrações das cordas determina a altura do som produzido. Cordas mais curtas e finas produzem tonalidades mais agudas, enquanto cordas mais longas e grossas geram tonalidades mais graves. Fatores a serem considerados são o comprimento da superfície do martelo que está em contato com a corda, pois martelos pequenos e finos no registro agudo produzirão um som mais rico em parciais mais altos (agudo) do que os martelos maiores. Da mesma forma, martelos mais duros excitam ainda mais os modos agudos do que os mais graves, isto porque a compressão do feltro durante o contato faz com que a dureza do martelo aumente momentaneamente (SENDINO, 2004). Além do mais, quanto maior a velocidade

do martelo, mais ele irá comprimir e maior será a excitação das parciais superiores, assim terão uma melhor qualidade sonora.

Em relação às interferências da forma de ataque nas condições de contorno da Equação de Onda há observações importantes a serem feitas, segundo Figueiredo (1977), no caso especial da corda martelada/percutida, teremos que, em relação às condições, $f(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$. Ou seja, podemos considerar o caso em que a corda elástica possui posição inicial em repouso. Nos instrumentos de cordas marteladas/percutidas, a corda encontra-se inicialmente em posição de repouso e é golpeada por um martelo fazendo com que a velocidade inicial seja v_0 na região de contato do martelo com a corda e seja nula em todos outros pontos (JAIME; PONCZEK, 2014):

$$y'(x, 0) = -v_0; \left(\frac{L}{2}\right) - d < x < \left(\frac{L}{2}\right) + d$$

$$y'(x, 0) = 0; x < \left(\frac{L}{2}\right) - d \text{ e } x > \left(\frac{L}{2}\right) + d$$

onde d refere-se a largura do martelo ²:

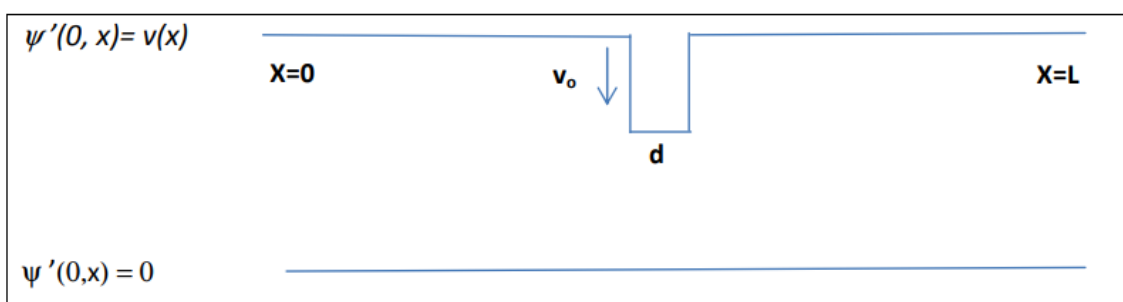


Figura 1 – Corda Martelada/Percutida

Fonte: JAIME, PONCZEK, 2014.

Em relação ao Baixo, como suas cordas são mais grossas, o seu som é mais grave, onde elas possuem seu próprio campo magnético, isso porque estão próximas dos captadores magnéticos. Em relação a forma de ataque do Baixo, o instrumento possui suas cordas dedilhadas/tangidas, onde a interação dedo-corda inicia quando a ponta do dedo começa a tocar a corda e termina quando a corda é liberada (NAVEDA, 2002). A corda é tirada de sua posição de repouso pelo dedo do intérprete e a seguir é solta com velocidade inicial nula (JAIME, PONCZEK, 2014). Como no caso do piano, Figueiredo (1977), argumenta que há um caso especial também para a corda dedilhadas/tangidas, teremos que,

²A expressão contida na imagem $\psi'(0, x) = v(x)$ e $\psi'(0, x) = 0$ faz referência à $g(x) = v(x)$ e $g(x) = 0$, respectivamente no contexto desta pesquisa

em relação às condições, $f(x) \neq 0$ e $g(x) = 0$. Desta forma, $y(x, 0) = f(x)$, referente ao deslocamento da corda, é uma função nula exceto pela pequena região central da corda onde o dedo desloca a corda e depois solta para que comece sua vibração. Além de que, como sua velocidade inicial é zero, $\frac{\partial y(x,0)}{\partial t(t=0)} = g(x) = 0$

Segundo Jaime (2016), o local onde dedo tange a corda pode ser considerado como um semicírculo de raio r , referente ao raio do dedo, assim³:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{(r^2 - x^2)}, & \text{se } \frac{L}{2} - r < x < \frac{L}{2} + r; \\ 0, & \text{se } x < \frac{L}{2} - r \text{ e } x > \frac{L}{2} + r. \end{cases}$$

³A expressão contida na imagem $\psi'(0, x) = 0$ faz referência à $g(x) = 0$, no contexto desta pesquisa

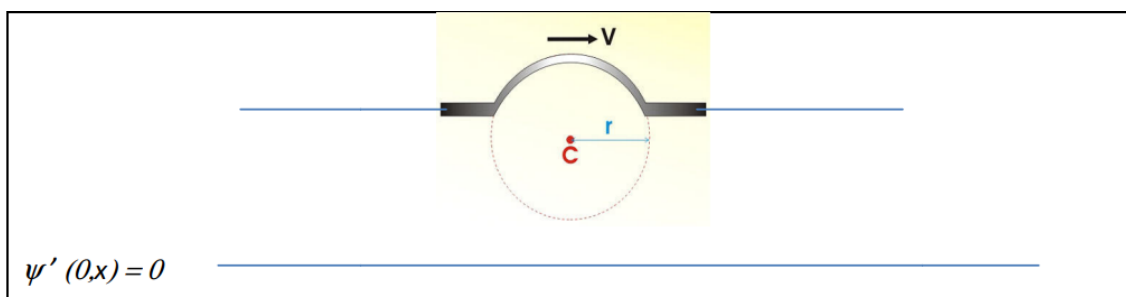


Figura 2 – Corda Dedilhadas/Tangidas

Fonte: JAIME, PONCZEK, 2014.

Embora cordas dedilhadas e marteladas/percutidas não sejam características na execução do violino, tais formas de ataque são utilizadas nele por músicos e compositores para causarem efeitos afetivos diversos nos ouvintes. A Física presente na constituição desse instrumento resulta ser fascinante, pois envolve princípios fundamentais da acústica, das vibrações e da ressonância.

Como é de conhecimento, a sua execução deve-se à vibração de cordas friccionadas pelas crinas de um arco, e estas vibrações são ricas em harmônicos, os quais são afetados pelas respostas acústicas do cavalete e do corpo do instrumento. Segundo Donoso et al. (2008), a corda vibrante do arco é considerada uma fonte dipolar linear, sendo um péssimo transmissor de energia sonora para o ar devido ao fato dela ser muito fina, então é necessário transferir a vibração da mesma para uma superfície grande de forma que está, ao vibrar, desloque uma maior quantidade de ar, conseguindo-se assim uma boa intensidade de som.

No violino, a peça que transfere as vibrações das cordas para a caixa acústica e para o ar encerrado nela é o cavalete. A partir disso, os tampos (inferior e superior) colocam em movimento o ar das vizinhanças e transmitem o som e a vibração do ar dentro da caixa do violino. Segundo Donoso et al. (2008), a qualidade de um violino depende das propriedades físicas das madeiras utilizadas na sua construção, como a densidade, a elasticidade, a dureza e a velocidade de propagação do som na madeira. A madeira geralmente utilizada para a construção do tampo superior é o abeto, pois está é considerada como elástica, com sua densidade e dureza relativamente baixa. A estrutura em espiral das moléculas de celulose, por outra parte, conferem ao abeto uma considerável firmeza e resistência, além de que a elevada velocidade do som ao longo das fibras favorece a rápida propagação das vibrações por todo o violino. Para o tampo inferior se emprega o bordo, o qual possui boa elasticidade, maior densidade e dureza.

Os dois orifícios em forma de “f” permitem considerar a caixa do violino como um ressoador de Helmholtz. Quando este ressoador oscila, as colunas de ar se movimentam

através das aberturas produzindo oscilações na pressão interna da cavidade. Estes orifícios comunicam para o exterior as vibrações do ar dentro do violino e tem uma grande influência no timbre do violino. A influência das ressonâncias do ar dentro do instrumento, do corpo e dos tampos reforçam as componentes (harmônicas). Já os orifícios denominados de ouvidos e o coração do cavalete possui as funções de reforçar as frequências correspondentes ao 3º harmônico da nota Mi_5 assim como o 2º e 6º harmônico da nota L_4 , enquanto o coração reforçar o 3º e 6º harmônicos desta última nota (DONOSO et al., 2008).

O violino, possui suas propriedades acústicas fortemente influenciadas por dois elementos ocultos no seu interior: a Alma e a Barra Acústica. A primeira é responsável por transmitir as vibrações do tampo superior para o inferior e altera os modos vibracionais de ambos os tampos ao impor um ponto nodal praticamente estacionário nos pontos de contato entre eles. Ao respeito Donoso et al. (2008, p.6) relatam- “a alma tem uma importância primordial no instrumento sendo que pequenas mudanças em sua posição, na sua forma ou na qualidade da madeira podem alterar significativamente o timbre e a sonoridade do instrumento”-. No caso da barra acústica, esta tem a função acústica de transmitir as vibrações a todo o corpo do violino, fazendo com que uma grande área do tampo oscile em fase, o que é especialmente importante para os sons graves devido ao seus comprimentos de onda.

Os primeiros estudos do problema da vibração produzida por uma corda friccionada por um arco foram realizados pelo fisiologista e físico alemão Hermann von Helmholtz (1821-1894). Este observou o movimento de uma partícula colada na corda do violino e concluiu que esta vibração é muito diferente da vibração senoidal observada nas cordas estacionárias. O som gerado ao passar um arco pelas cordas depende essencialmente de três variáveis: velocidade do arco, a posição do arco (distância ao cavalete) e a força com que se pressiona o arco contra as cordas. A posição da partícula em função do tempo assemelha-se a um zig-zag, esta vibração particular de uma corda friccionada por um arco é conhecida como “movimento de Helmholtz”. Como já discutido, a quantidade e a intensidade dos harmônicos presentes na vibração da corda dependem da forma como ela é excitada, ou seja, sua forma de ataque, por esta razão a vibração da corda friccionada por um arco é diferente da vibração de uma corda tangida ou percutida e evidentemente os seus timbres também o serão.

A forma da onda na corda excitada pelo arco pode ser descrita por uma onda “dente-de-serra” modificada, suas características se assemelham aos dentes de uma serra, uma forma de onda que produz um espectro de som rico em harmônicos. Ambos, os harmônicos pares e os ímpares, estão presentes no espectro do som e suas intensidades decaem bem mais lentamente que as intensidades dos harmônicos produzidos numa corda

tangida. Para uma corda friccionada por um arco, a intensidade do n-ésimo harmônico é $\frac{1}{n}$ da intensidade do tom fundamental. Os sons com muitos harmônicos soam cheios e musicalmente mais ricos.

Nas cordas friccionadas por arco, como já mencionado, a corda vibrante é forçada pelo arco. Suas condições iniciais de repouso, isto é, sua velocidade e posição iniciais da corda são nulas:

$$y(x, 0) = f(x) = 0; y'(x, 0) = 0$$

Segundo Jaime e Ponczek (2014), a força que o arco exerce na corda será proporcional à força normal, $F = \pm\mu N$

onde μ é o coeficiente de atrito cinético entre o arco e a corda.

$$F = \begin{cases} \pm\mu N, & \text{se } \frac{L}{2} - d < x < \frac{L}{2} + d; \\ 0, & \text{se } x < \frac{L}{2} - d \text{ e } x > \frac{L}{2} + d. \end{cases}$$

onde d é a largura do arco.

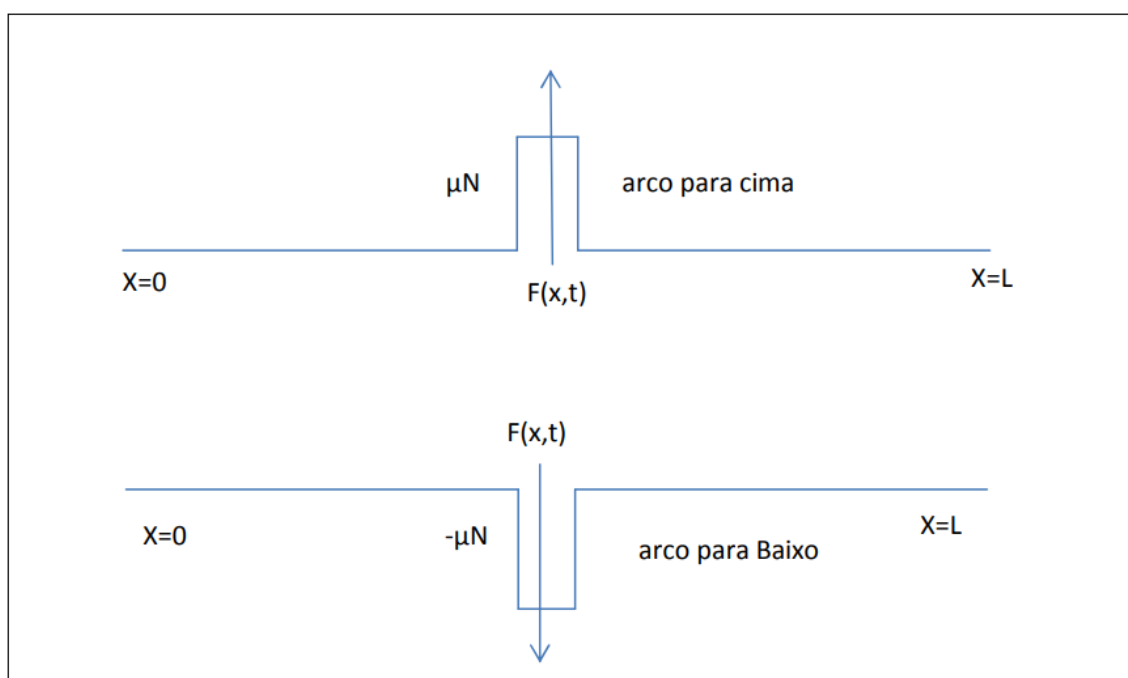


Figura 3 – Corda Friccionada por arco

Fonte: JAIME, PONCZEK, 2014⁴.

⁴A expressão contida na imagem $F(x, t)$ faz referência à $y(x, t)$, no contexto desta pesquisa

METODOLOGIA

Está é uma pesquisa exploratória de índole descritiva e natureza quantitativa. A sua ênfase está na análise espectral que permitirá caracterizar comportamento harmônico das notas A4 e A5, com 440Hz e 880 Hz, nas cordas (2da, 3eira, 4ta) e na 1eira, respectivamente. Os dados serão obtidos a partir do processamento de tais sinais sonoros os quais foram gerados no violino e extraídos da biblioteca de áudios TinySol. Esta é uma biblioteca, onde é possível encontrar amostras sonoras de instrumentos, executados em diferentes dinâmicas e notas. Os trechos de nosso interesse têm sido executados sob a dinâmica do pianíssimo nas quatro cordas do instrumento supracitado.

A aplicação da Transformada Rápida de Fourier (FFT) como técnica de processamento de dados para análise espectral, se dá no intuito de transformar sinais que estão no domínio do tempo em estruturas sonoras que estejam no domínio da frequência. Este último se deve ao fato da nossa capacidade auditiva ser mais sensível a mudanças de frequências do que aquelas relativas ao tempo ou andamento, no caso da música. Assim sendo, poderemos ter uma imagem do comportamento dos componentes harmônicos dos pulsos sonoros e dessa forma caracterizar o timbre dos trechos em questão.

A classificação deste estudo como exploratório e descritivo se faz possível, segundo Gil (2002) uma vez que procura-se com ele explorar e descrever características, neste caso acústicas, dos sinais referenciados acima para o violino sob a dinâmica proposta. Acreditamos que para dinâmicas diferentes possamos obter componentes harmônicos (espectros) com características distintas, segundo nos aponta a teoria e as referências a que tivemos acesso durante o desenvolvimento do trabalho. Contudo, estes casos não constituem o foco do estudo que apresentamos nessa ocasião.

A análise espectral da nota Lá (A4 e A5), no primeiro caso nas cordas SOL (G), RÉ (D), LA (A) e na corda MI (E) A5 para o pianíssimo complementa essa abordagem ao fornecer uma compreensão mais detalhada das variações espectrais que possam ser encontradas. Por outro lado, a escolha da metodologia quantitativa, especificamente a análise espectral via FFT, é apropriada para este estudo, pois permite a decomposição dos sinais sonoros em suas componentes de frequência. Isso é crucial para conseguirmos caracterizar o comportamento dinâmico (pianíssimo) das execuções nas cordas do instrumento, de forma a obtermos respostas objetivas e mensuráveis. Ou que de alguma forma possibilitem sejam percebidas regularidades, ainda que nossa hipótese faça explícita a crença de existirem diferenças espectrais mesmo que estejamos tratando da mesma nota musical. Isto evidenciaria que mesmo tocando a nota em questão no violino, com a mesma dinâmica obteremos diferenças timbrísticas que podem ser visualizadas através da análise e caracterização das FFTs processadas.

Para o processamento e análise dos trechos sonoros descritos acima, foi utilizado o Origin 6, o qual nos possibilitou a obtenção dos espectros relativos às FFTs para cada pulso. O Origin 6, é uma ferramenta poderosa para análise de dados e visualização do comportamento destes, o que inclui a capacidade de realizar a Transformada Rápida de Fourier (FFT) e gerar os espectros associados a ela. O Origin 6 permite uma análise espectral detalhada dos sinais sonoros, em particular, do violino. Isso significa que podemos examinar a distribuição de energia nas diferentes frequências presentes. A análise quantitativa dos espectros permite uma compreensão mais profunda das características acústicas desse instrumento para essa nota e dinâmica.

Por outra parte, a pesquisa é classificada como bibliográfica, pois foram verificadas informações na literatura: artigos, textos, livros, teses, monografias, entre outros, os quais ajudaram a trilhar o desenvolvimento da pesquisa em questão.

A amostra musical está formada pelos seguintes trechos sonoros para a nota Lá com as características supra citadas: a) Vn-ord-A4-pp-2c b) Vn-ord-A4-pp-3c c) Vn-ord-A4-pp-4c d) Vn-ord-A5-pp-1c

Onde Vn-ord refere-se ao violino ordinário; A4 refere-se à nota Lá na quarta oitava do piano e como consequência A5, Lá na quinta oitava. Como visto previamente a classificação pp denota a dinâmica do pianíssimo, a qual se refere a uma execução do instrumento na qual o músico ao agir sobre o instrumento não provoca variações consideráveis de energia. Isso se traduz nas baixas amplitudes sonoras que podemos visualizar ao analisar os espectros.

RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS

A seguir apresentaremos os espetros relativos aos trechos sonoros previamente declarados. Dessa forma, faremos uma caracterização dos mesmos apontando o comportamento, para cada um deles, da amplitude da frequência fundamental e dos primeiros dois harmônicos do pulso, em questão. Assim mesmo, verificar-se-á se existem regularidades entre os espectros para a dinâmica sob a qual temos estudado tais sinais.

Pianíssimo

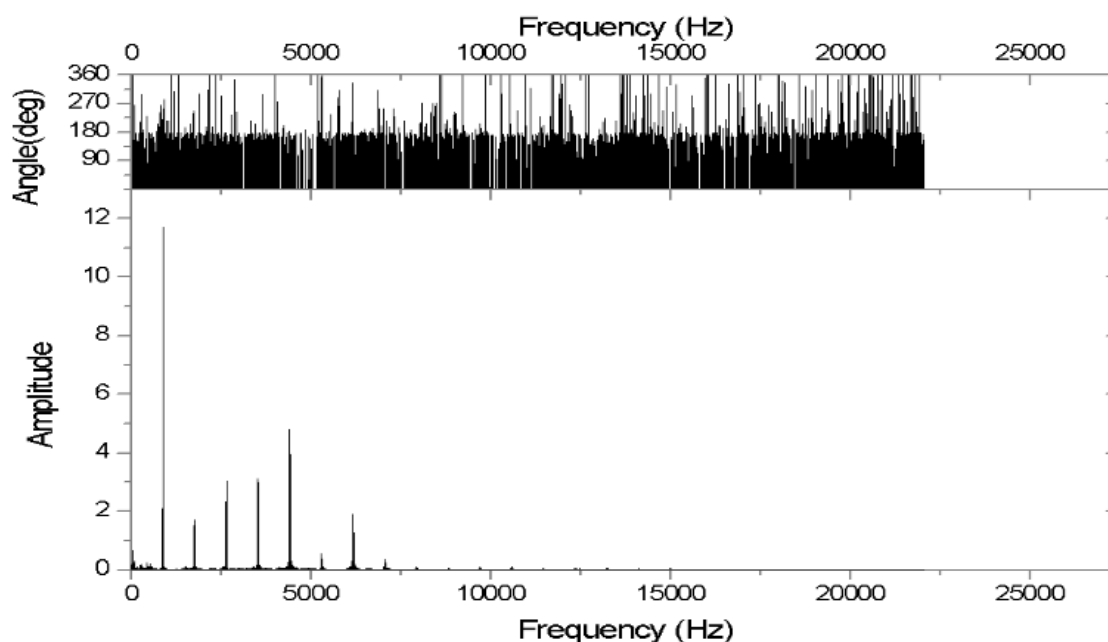


Figura 4 – FFT: Violino - Pianíssimo - 1° Corda

Fonte: Autor, 2024.

Frequência (Hz)	Fundamental	1° Harmônico	2° Harmônico
	867,8 Hz	1740,8 Hz	2619,0 Hz
Amplitude (u)	Fundamental	1° Harmônico	2° Harmônico
	11,7 u	1,8 u	3,2 u

Tabela 1 – Frequência e Amplitude: pp - 1c

Na primeira corda para o A5=880Hz, podemos observar que as amplitudes relativas a cada frequência são as menores registradas. As frequências relativas à fundamental, 1° harmônico e 2° harmônico são próximas às registradas teoricamente. No que diz respeito às variações existentes com a teoria, estas poderiam encontrar explicações quando consideramos os efeitos que um instrumento real experimenta ao ser executado por um instrumentista. Nesse caso não só influenciam as condições que temos descrito anteriormente, mas também a subjetividade do violinista. Contudo, o espectro mostra em si, elementos que corroboram a teoria: a fundamental possui maior amplitude entre as frequências dos harmônicos, mas o 2° harmônico possui amplitude maior que o 1° harmônico, apesar da diferença ser pequena.

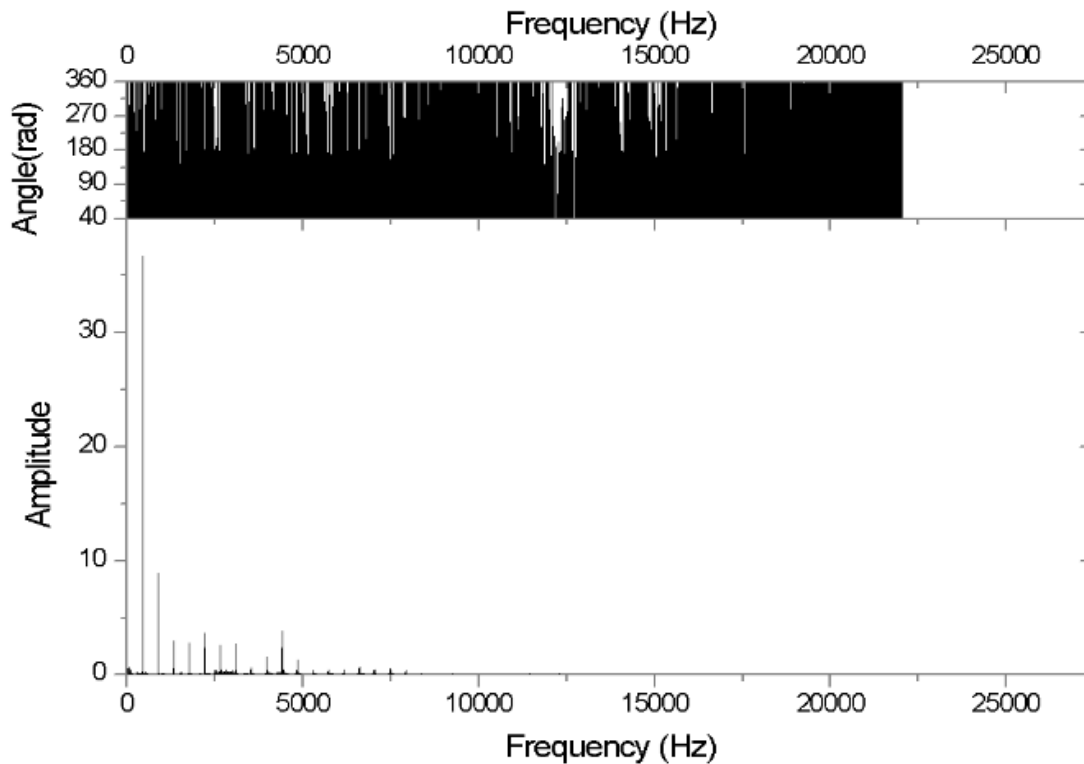


Figura 5 – FFT: Violino - Pianíssimo - 2° Corda

Fonte: Autor, 2024.

Frequência (Hz)	Fundamental	1° Harmônico	2° Harmônico
	477,5 Hz	903,8 Hz	1330,0 Hz
Amplitude (u)	Fundamental	1° Harmônico	2° Harmônico
	37,2 u	9,6 u	3,5 u

Tabela 2 – Frequência e Amplitude: pp - 2c

Para a segunda corda com respeito ao $A_4=440\text{Hz}$, como esperado, percebe-se certa variação nos dados obtidos com respeito aos valores teóricos de frequência. Ainda assim, foi possível corroborar a teoria quanto obtivemos para a fundamental a maior amplitude. Contudo, verificou-se que existiu uma variação considerável respeito às amplitudes da própria fundamental e o primeiro harmônico. Já a diferença experimentada entre o valor teórico da frequência do segundo harmônico $2f$ com respeito ao valor obtido é menor do que o da fundamental e do primeiro harmônico referente à teoria.

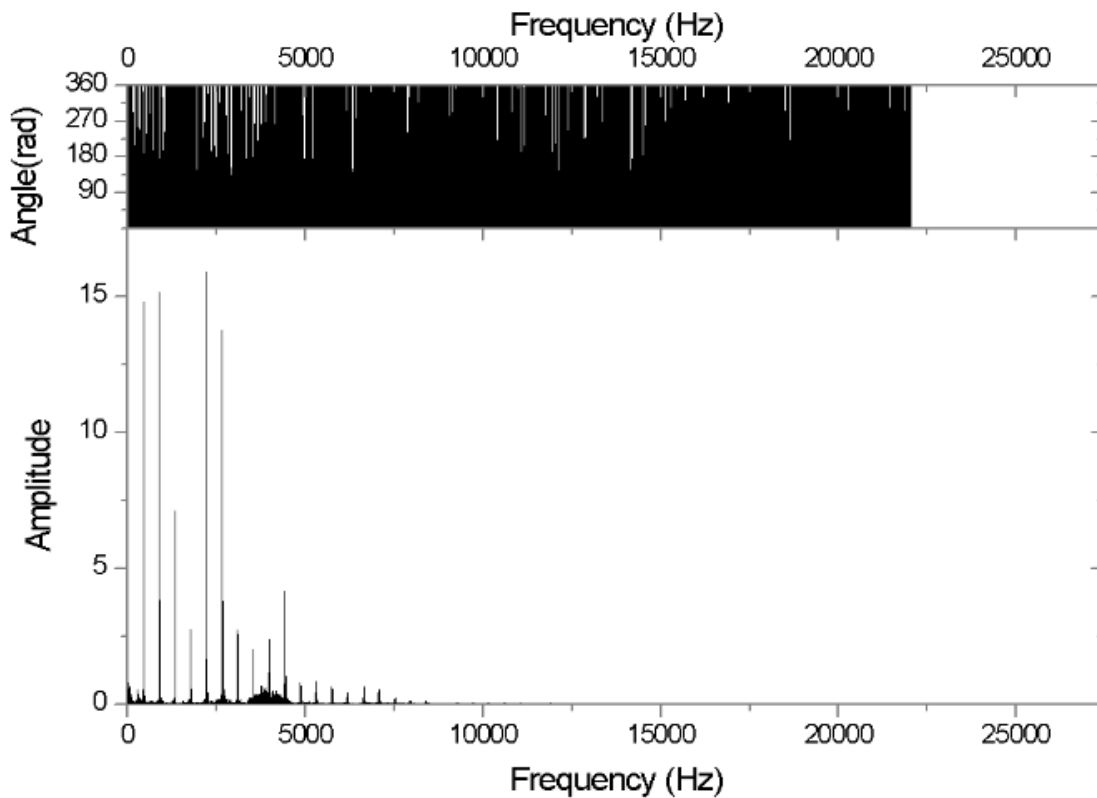


Figura 6 – FFT: Violino - Pianíssimo - 3° Corda

Fonte: Autor, 2024.

Frequência (Hz)	Fundamental	1° Harmônico	2° Harmônico
	405,6 Hz	903,8 Hz	1330,0 Hz
Amplitude (u)	Fundamental	1° Harmônico	2° Harmônico
	14,9 u	15,3 u	7,4 u

Tabela 3 – Frequência e Amplitude: pp - 3c

Para a terceira corda percebemos uma anomalia com respeito à teoria. Neste caso a maior amplitude $A= 15,9$ u do espectro (FFT), foi obtida para a frequência $5f= 2182,5$ Hz, sendo esta relativa ao quinto harmônico. Este acontecimento não encontrado na bibliografia consultada pode ter as suas causas na própria estrutura, orifícios em f , nos elementos que descrevemos previamente: a Alma e a Barra acústica ou mesmo na madeira que foi utilizada para a elaboração do instrumento em questão. Por sua parte para a fundamental se obteve um valor de frequência $f= 405$ Hz, como pode ser verificado na tabela acima. Assim mesmo, percebeu-se que os valores que obtivemos para as frequências do primeiro e segundo harmônicos são as mesmas que as experimentadas para a segunda corda em A4. Sendo ainda a amplitude do primeiro harmônico maior do que aquele encontrado para a fundamental. Tendo em vista a FFT para o Lá emitido pela corda do

mesmo nome (3 eira), podemos dizer que o timbre dessa nota resultou ser o mais rico enquanto ao número de harmônicos presentes.

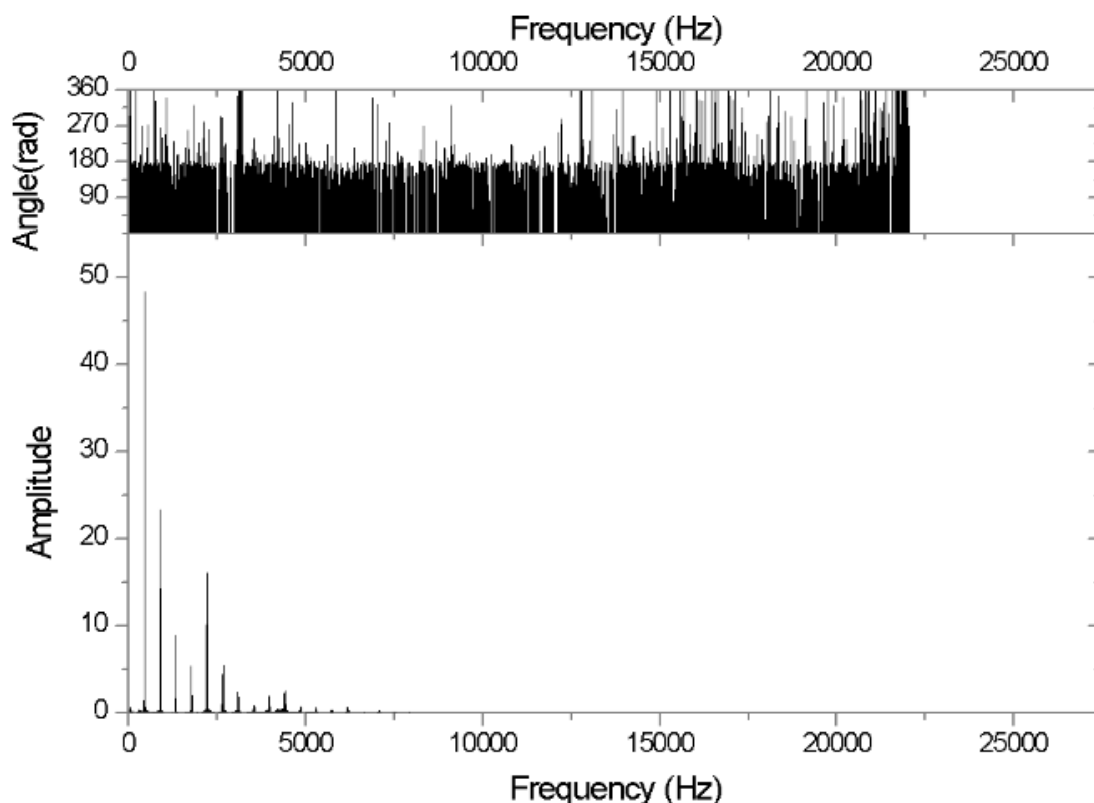


Figura 7 – FFT: Violino - Pianíssimo - 4° Corda

Fonte: Autor, 2024.

Frequência (Hz)	Fundamental	1° Harmônico	2° Harmônico
	405,6	903,8	1330,0
Amplitude (u)	Fundamental	1° Harmônico	2° Harmônico
	49,5 u	23,7 u	9,0 u

Tabela 4 – Frequência e Amplitude: pp - 4c

No caso da quarta corda, o Mi (E), a FFT mostrou que a maior amplitude corresponde à fundamental como pode ser verificado na tabela correspondente. Tal resultado está em consonância com a teoria. Já para o primeiro harmônico e para o segundo o Lá nessa corda experimentou uma diferença considerável, no que se refere à amplitude.

Portanto, notou-se que nos quatro casos, referentes ao pianíssimo, cada uma das FFTs relativas à corda respectiva, obteve-se comportamentos espectrais diferentes, mesmo ao estarem referentes a mesma dinâmica. As frequências e amplitudes possuem variações em cada caso, com peculiaridades muito particulares que podem estarem influenciadas

por diversos motivos, como as causas citadas para a anomalia descrita na terceira corda, o Lá (A), pela forma como o violino tem sido executado pelo violinista. São essas diferenças, mesmo que pequenas, as causantes das diferenças timbrísticas que percebemos ao ouvirmos a execução da no Lá.

CONCLUSÕES

O estabelecimento de relações entre Matemática, Física e Música persiste em ser conflitante para alguns. Tentar deixar em claro ideias ao respeito e aproximar tais elos aos nossos pares constitui uma forma de aprofundarmos na interpretação que damos à natureza ao nosso redor. É por momentos difícil sairmos da visão indutivista (aquela vinda dos nossos órgãos sensoriais) que nos faz acreditar que aquilo que vemos e sentimos ao respeito ao som e à música, por exemplo, não tem vínculo algum com o formalismo científico que essas ciências nos oferecem. Isto porque é corriqueiro desestimar o diverso potencial de inquietações, estudos e pesquisas associadas à música e às sonoridades com um perfil tecnicista e formal que vai além daquele ludicamente assumido para aquela arte.

Conseguirmos caracterizar físico-matematicamente o timbre da nota Lá na dinâmica do pianíssimo nas quatro cordas do violino constituiu um desafio. Em princípio desconstruir, em parte, uma ideia que persistia em nossas cabeças, sobre a necessidade intrínseca de físicos e matemáticos de encontrarmos regularidades nos eventos que estudamos da natureza. Nesse sentido, Luzuriaga (2007) refere-se a um físico é feliz se um sistema é linear, isto é, a uma excitação dois vezes mais forte corresponde uma resposta dois vezes mais intensa; a uma três vezes maior se obterá uma resposta relativa ao triplo e assim por diante. No caso dos sons emitidos por instrumentos musicais as respostas que se encontram, geralmente, são complexas o que faz que nos afastemos de considerações lineais- diz o autor. No caso que nos compete fizemos a ressalva do, em parte, porque sabendo da complexidade do timbre nos pareceu coerente encontrarmos diferenças nos espectros que caracterizam o Lá para a dinâmica supra citada. Entretanto, guardávamos conosco a possibilidade de que encontraríamos similaridades evidentes entre os espectros que obtivéssemos, ao final estaríamos pesquisando a mesma frequência sob a ação de uma mesma dinâmica de execução do violino. Isto último não se corroborou, o que reforça o explicitado por Luzuriaga. O fato de percebermos que nossa hipótese foi verificada nos leva a considerarmos que: enquanto para as cordas 1ª (G) Sol; para a 2ª (D) Ré; 4ª (E) Mi se obteve coerência com Calvo-Manzano (1991) e Roederer (2009) quando afirmam que o primeiro harmônico é o de maior amplitude e que assim mesmo, existiria um decréscimo desta grandeza para harmônicos sucessores. Contudo, encontramos que no espectro timbrístico que obtivemos para a corda Sol (G) o quinto harmônico é o segundo que apresenta maior amplitude. Neste caso, pensamos que esse comportamento possa dever-se ao efeito dos componentes estruturais que formam o violino. Nesse sentido, estamos falando de uma execução real com independência da dinâmica de execução desse instrumento. Assim pensando, chegamos a mais uma consideração importante. Esta devida ao próprio estado de ânimo e afetos do músico executante da dinâmica em questão, uma vez que acreditamos que a intencionalidade do executante também pode contribuir

significativamente na sonoridade. No que diz respeito à terceira corda o Lá (A) achamos oportuno destacar que foi nessa corda onde encontramos uma anomalia com respeito à teoria. Isto porque o harmônico de maior amplitude se encontra na quinta posição dentre os presentes. Para isso encontramos uma possível razão para tal acontecimento. Em princípio estamos falando de uma corda cujo som ao ar (execução da corda sem pressioná-la) é a própria frequência que pesquisamos. Assim sendo, pensamos que tal resposta se deva ao reforço harmônico que a nota Lá manifesta na mesma corda em que encontramos essa sonoridade, daí a riqueza de harmônicos. No que diz respeito ao espectro obtido para a terceira corda (o Lá) e de maneira particular a resposta do quinto harmônico entendemos que a estrutura, o material, a ação humana e os componentes que conformam o violino, podem influenciar na resposta que encontramos para o timbre desta corda. Nesse sentido, o fato de verificarmos tal anomalia junto ao Lá produzido pela terceira corda, nos leva a considerar a contribuição que os diferentes elementos que compõe o violino, por insignificantes que estes nos pareçam, podem ser determinantes no timbre que ouvimos.

Dessa forma, através da análise dos dados pelas FFTs, podimo confirmar a nossa hipótese, pois ainda que tivéssemos a mesma nota executada em um mesmo instrumento, sob a dinâmica do pianíssimo nas quatro cordas do violino, os espectros timbrísticos encontrados são diferentes. Tal resultado mostra a diferença timbrística a que fizemos referência. Assim alcançamos o objetivo traçado, pois conseguimos caracterizar, a partir de uma perspectiva físico-matemática, os espectros relativos à nota Lá emitida sob a dinâmica do pianíssimo, nas cordas do violino. Com este estudo esperamos contribuir para uma percepção diferente das sonoridades a que temos acesso. E assim mesmo darmos mais um passo num campo científico que busca compreender a Matemática e a Física presentes na beleza que existe na música.

REFERÊNCIAS

- ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados** 3. ed. São Paulo: Escrituras, 2003. 333 p.
- BROMBERG, Carla. Música e história da matemática. **história da ciência e ensino: construindo interfaces**, v. 6, p. 1-15, 2012.
- CALVO-MANZANO, Antonio. **Acústica físico-musical**. Real Musical (RM) Madrid, 1991
- CHANG, Pablo. **Aplicação da série de Fourier como análise acústica de instrumentos musicais**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.
- DONOSO, José Pedro; TANNÚS, Alberto; GUIMARÃES, Francisco; FREITAS, Thiago Corrêa. A física do violino. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 30, n.2, p. 1-21, 2024.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e equações diferenciais Parciais**. São Paulo: **Edgard Blucher**, 1977. 147 p.
- JAIME, Pedro Javier Gómez; PONCZEK, Roberto L. Contribuições harmônicas e fatores que influenciam o timbre no piano do "Concerto Italiano-971 de Bach". **Caderno de Física da UEFS**, p. 67-77, 2015.
- JAIME, Pedro Javier Gómez. **Percebendo a melodia com os acordes da ciência: um estudo da sensibilidade musical a partir da Física**. Tese (Doutorado) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2016.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de análise: volume 1**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014. 447 p.
- LUZURIAGA, Javier. **La Física de los instrumentos musicales**. Colección Ciencia Joven 12,2007.
- NAVEDA, Luiz Alberto Bavaresco de. **O Timbre e o volume sonoro do violão: uma abordagem acústica e psicoacústica**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Música da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2002. 189 p.
- ROEDERER, Juan G. **Acústica y psicoacústica de la Música**. Melos-1a ed.-Buenos Aires, 2009
- SENDINO, Juan José Burread. La acústica del piano. **Conservatorio Profesional de Música Arturo Soria**, Madrid, , 2004. p. 44.
- TEIXEIRA DA SILVA, L.; OLIVEIRA GROENWALD, C. L. Matemática e música: a história da relação e evolução de duas Ciências através dos tempos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 1, n. 2, p. 130-141, 2018.
- ZANATO, Fernando da Silva. **Matemática e música: relações entre as séries e transformadas de Fourier e a teoria musical**. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Mato Grosso, Mato Grosso, 2017.