

TAXA DE VARIAÇÃO E DERIVADA: UMA INTERSEÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

TAUX DE VARIATION ET DÉRIVÉE: UNE INTERSECTION DANS L'ENSEIGNEMENT FONDAMENTAL

Flavia dos Santos Ferreiraⁱ
Eliane Santana de Souza Oliveiraⁱⁱ

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um levantamento inicial sobre o conceito de taxa de variação, para atender nosso objetivo principal que é analisar como o conceito de taxa de variação é abordado em livros didáticos da Educação Básica. Esse estudo é parte das investigações de uma pesquisa de mestrado em andamento, na qual pretendemos desenvolver uma Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) para o estudo da derivada por meio da taxa de variação. Utilizamos como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) para suscitar as condições e restrições e às potencialidades do conceito de taxa de variação para a construção/ reconstrução da derivada no Ensino Superior. Para realizar esse levantamento, inicialmente, trouxemos a análise da derivada no Ensino Superior, o qual percebemos o conceito de taxa de variação como um ponto em comum com a Educação Básica, então o passo seguinte foi investigar como esse conceito é apresentado nos livros didáticos desse nível de ensino.

Palavras-chave: Modelo Epistemológico de Referência; Taxa de Variação; Derivada.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous présentons une étude préliminaire du concept de taux de changement, afin d'atteindre notre objectif principal analyser comment ce concept est abordé dans les manuels scolaires de l'enseignement fondamental. Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche de master en cours, visant à développer une activité d'étude et de recherche (AER) sur la notion de dérivée à travers le prisme du taux de changement. Nous avons utilisé la théorie anthropologique de la didactique (TAD) comme cadre théorique pour examiner les conditions, les limites et le potentiel du concept de taux de changement dans la construction/reconstruction de la dérivée dans l'enseignement supérieur. Pour mener cette étude, nous avons d'abord analysé la notion de dérivée dans l'enseignement supérieur, où nous avons identifié le concept de taux de changement comme un point commun avec l'enseignement fondamental; l'étape suivante a donc consisté à étudier comment ce concept est présenté dans les manuels scolaires à ce niveau d'enseignement.

ⁱ Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGenM) da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Endereço para correspondência: Rua São José, s/n, São Bento do Inhatá, Amélia Rodrigues, Bahia, Brasil. E-mail: flaviasantos821@gmail.com.  ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9349-5334>

ⁱⁱ Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana (UFBA/UEFS). Professora Adjunta A na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Feira de Santana, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Castro Alves, Nº468, Centro, Santo Estevão, Bahia, Brasil. E-mail: essoliveira@uefs.br.  ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3981-1620>

Introdução

As dificuldades de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é um tema recorrente em pesquisas na Educação Matemática, devido aos índices elevados de reprovação e abandono desse componente no Ensino Superior. Em vista disso, esse trabalho é oriundo da nossa pesquisa de mestrado que possui como objetivo analisar se uma Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) utilizando a noção de taxa de variação pode contribuir para a construção do conceito de derivada no Ensino Superior no curso de Licenciatura em Matemática.

Desse modo, o nosso objetivo, neste trabalho, é analisar como o conceito de taxa de variação é abordado em livros didáticos na Educação Básica. Queremos analisar a forma como o assunto é tratado em busca de estabelecer conexões com esse mesmo conceito no estudo da derivada no Ensino Superior. Esse estudo pode auxiliar na identificação de quais elementos desse conceito são considerados importantes, visando sua transposição para noções mais abstratas no Ensino Superior.

Nessa etapa da pesquisa estamos em busca de entender o que as instituições dominantes apresentam sobre a taxa de variação, levantando as condições e restrições em relação a possibilidades de associar ao estudo de derivadas. E após essa etapa, instituir um modelo de referência para o estudo de derivadas por meio da taxa de variação, para ser incorporada a AEP.

A justificativa para a realização desse estudo está no público alvo da pesquisa: estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Uma vez que, o intuito da nossa AEP também é contribuir para a prática docente desses estudantes em formação, apresentando um novo dispositivo didático e investigativo e mostrando a relação entre os conceitos estudados no Ensino Superior com a sua prática de ensino na Educação Básica.

Utilizaremos a metodologia qualitativa, em uma abordagem de análise documental. Pois, nossas investigações serão baseadas nas interpretações das análises da apresentação do conteúdo e exemplos resolvidos propostos no livro didático. Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma: a primeira seção dedicada ao referencial teórico; a segunda para apresentar a construção da noção de derivada no Ensino Superior; a terceira para a discussão

da metodologia; a quarta seção para a análise do livro didático da Educação Básica; a quinta, e última parte, discute os resultados.

1 Referencial teórico

Utilizamos como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Essa teoria foi desenvolvida por Yves Chevallard com o objetivo de estudar o homem diante às situações matemáticas, compreendendo e descrevendo as relações sujeito-instituição-saber (Almouloud, 2007). Outro ponto relevante a respeito da teoria são os termos primitivos: Objetos, Pessoa, Instituições, Relação Institucional ou Pessoal (Chaachoua; Bittar, 2019). Dessa forma, a TAD situa a atividade matemática como uma prática humana analisando e identificando os problemas relacionados aos objetos de saber, para isso, apoia-se em termos vinculados a ecologia.

Para Chevallard, o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento, produto da ação humana em uma instituição caracterizada por qualquer coisa que se produza, se utiliza e se ensina, além de poder eventualmente transpor as instituições. Assim, o autor introduz a noção de habitat de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará a função desse saber, ou seja, determinará seu nicho (Almouloud, 2007, pp. 113-114).

O saber é uma forma de organização de conhecimentos, destacando que isso ocorre devido ao reconhecimento e às relações estabelecidas entre o objeto e o sujeito ou alguma instituição (Almouloud, 2007). Portanto, a Relação Institucional descreve de que forma determinada instituição utiliza o objeto, que por sua vez condiciona a Relação Pessoal, que são as interações feitas pelo sujeito. Essa relação ocorre de acordo com a posição ocupada pelo sujeito em determinada instituição, assim professores e estudantes interagem de maneiras distintas com o mesmo objeto, por exemplo.

A descrição dessas atividades desenvolvidas é feita a partir da abordagem praxeológica. Segundo Chaachoua e Bittar (2019, p. 31), “Este modelo foi então introduzido como uma resposta a uma necessidade metodológica, a de descrever as relações institucionais”. Desse modo, as noções de tarefa, técnica, tecnologia e teoria são utilizadas para modelar essas atividades matemáticas.

As tarefas e técnicas formam o bloco prático-técnico da teoria. As tarefas são identificadas por verbos de ação que ditam a sua natureza e as técnicas são as maneiras de se fazer determinada tarefa. Entendemos as técnicas como um conjunto de ferramentas

disponíveis em determinada instituição, e não como um método ou algoritmo estruturado (Almouloud, 2007). Sendo esse bloco baseado nos seguintes postulados:

1. Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas.
2. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica. (Almouloud, 2007, p. 114).

O terceiro postulado da teoria diz respeito ao bloco teórico da TAD, a saber: “3. A ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições” (Almouloud, 2007, p. 116). Logo, está vinculado ao fato de que toda técnica utilizada em determinada instituição precisa ser devidamente justificada para garantir a sua eficácia. Esse é o papel da tecnologia, ou seja, é ela quem vai legitimar a técnica escolhida para a realização da tarefa. E da mesma forma que precisamos justificar a técnica, também é necessário fazer o mesmo com a tecnologia, sendo isso função da teoria. Para a TAD, para que um objeto de saber seja considerado completo é necessário contemplar os dois blocos da abordagem praxeológica.

Portanto, as análises realizadas nesse artigo visam analisar como o conceito de taxa de variação é abordado em livros didáticos na Educação Básica, a fim de revelar quais condições e restrições a instituição dominante livro didático aborda sobre o objeto do saber taxa de variação. E assim, instituir um modelo de referência capaz de suscitar as potencialidades de determinados conceitos para a construção/ reconstrução de objetos de conhecimento matemático, no nosso caso, a derivada.

2 Uma análise sobre a derivada

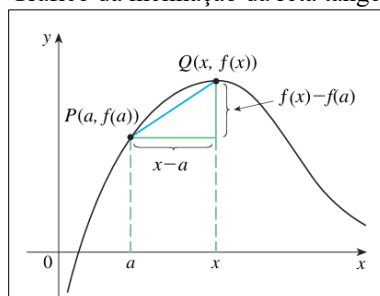
Abordamos nessa seção a construção da noção de derivada e os diferentes significados atribuídos a ela. Esse estudo será associado, posteriormente, a análise do livro didático da Educação Básica em busca de identificar elementos em comum e que possam agregar a AEP da nossa pesquisa de mestrado. Assim como, possam ser integrados ao conhecimento do professor de matemática, com o intuito de estabelecer uma relação entre sua formação e prática pedagógica.

A palavra tangente é derivada do termo em latim *tangens*, cujo significado é “tocando”. Desse modo, podemos compreender uma tangente a uma curva como sendo a reta que toca essa curva, e ainda, essa reta deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato (Stewart, 2013). Mas, de forma geral, nos questionamos, como estabelecer relações

com curvas mais complexas? Na Física, Química, Engenharias e áreas afins, os dados de determinado experimento não são expressos por equações e funções de forma explícita. Esses resultados aparecem no formato de um gráfico, representado por meio de uma curva, e, para realizar essas análises é necessário fixar uma reta tangente em determinado ponto, de modo que seja possível determinar uma equação ou função e verificar o seu comportamento.

Porém, apenas essa reta e seu respectivo ponto não são suficientes para compor essa análise, uma vez que ficaríamos impossibilitados de determinar sua inclinação. Logo, precisamos de dois pontos distintos para calcular essa declividade. Observe a Figura 1 abaixo.

Figura 1 - Gráfico da inclinação da reta tangente



Fonte: Stewart (2013)

O ponto $P(a, f(a))$ pertence à reta tangente à curva, até então o único ponto conhecido, e $Q(x, f(x))$ é o nosso segundo ponto, marcado sobre a curva para calcularmos a inclinação da reta secante PQ . O termo secante vem do latim *secans* e significa corte. Portanto, uma reta secante toca a curva mais de uma vez. Logo, à medida que nos aproximamos do ponto P por meio de variações no ponto Q , conseguimos determinar uma inclinação. Então, dizemos que essa declividade é o limite das retas secantes. Esse limite é denominado como sendo a derivada. Formalmente, temos que: $m_{PQ} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Uma outra interpretação para esse problema é por meio da taxa de variação. Nesse caso, consideramos $P(a, f(a))$ e $Q(a + h, f(a + h))$, sendo $a + h$ a representação da variação de posição. Logo, temos que: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Destacamos que uma condição necessária e suficiente para h tender a zero, é que x tenda a a (Stewart. 2013).

Por fim, para a interpretação da derivada sob o ponto de vista da taxa de variação, consideramos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$. Além disso, supomos y como uma variável que depende de x , sendo a função $y = f(x)$. Desse modo, a variação de x no intervalo determinado

por x_1 a x_2 implica uma variação correspondente em y , as quais representamos por: $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Essa variação é dada por: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Essa variação é denominada como taxa de variação média, que também corresponde à inclinação da reta secante PQ. Se fizermos x_2 aproximar-se cada vez mais de x_1 , estamos fazendo Δx tender a 0. Esse limite é conhecido como taxa de variação instantânea de y em relação a x quando $x = x_1$, o que é interpretado como a inclinação da reta tangente à curva que definimos no início, $y = f(x)$ (Stewart, 2013). Assim, temos que: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Portanto, percebemos a utilização do problema da reta tangente para a construção do conceito de derivada no estudo do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no Ensino Superior. Assim como, a noção de taxa de variação serve para que possamos verificar o dinamismo do conceito e das variações ocorridas através dos acréscimos feitos em Δx e Δy . Consequentemente, podemos observar que essas movimentações correspondem a declividade da reta secante, e à medida que nos aproximamos de P a partir do ponto Q conseguimos determinar uma aproximação da inclinação da reta tangente.

Contudo, alinhado ao nosso referencial teórico, precisamos observar as condições e restrições desse objeto de saber para que sejam integradas ao MER e posteriormente a AEP, resultando num recorte em comum com o Ensino Superior e a Educação Básica. Nesse sentido, possuímos como restrição o conceito de limite, a noção de reta secante e reta tangente associada a uma curva. Visto que esses conceitos são abordados implicitamente nos estudos de Geometria Plana na Educação Básica, conforme podemos observar nas habilidades EF09MA11 e EF09MA14 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes (Brasil, 2018, p. 318-319).

E como condição apresentamos a noção de taxa de variação, o ponto comum entre os dois níveis, embora com finalidades diferentes. Logo, de acordo com a BNCC temos a seguinte habilidade: “(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de

tecnologias digitais” (Brasil, 2018, p. 533). Na próxima seção, abordaremos a metodologia da pesquisa.

3 Metodologia

As investigações realizadas nesse artigo enquadram-se na metodologia qualitativa, segundo Creswell (2007, p. 184), nesse método é “empregado diferentes alegações de conhecimento, estratégias de investigação e métodos de coleta e análise de dados”. Portanto, voltamos nosso olhar para as interpretações geradas no decorrer do processo da pesquisa, apresentando e discutindo os resultados com base no referencial teórico exposto. Utilizaremos a abordagem da análise documental, nesse caso, estamos considerando o livro didático como fonte principal de informação para a coleta dos dados. Segundo Gil (2002) a pesquisa documental fundamenta-se na utilização de fontes que não foram previamente submetidas a um tratamento analítico sistemático, ou que ainda podem ser reinterpretadas e reorganizadas em conformidade com os objetivos da investigação científica, e em nosso caso o livro será a fonte de pesquisa desse artigo.

Selecionamos três livros didáticos para esta análise. O critério de análise foram livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) no site da Bahia. Para fazer essas escolhas, pesquisamos os livros adotados pelas escolas de Ensino Médio na Bahia. Uma vez que o estudo aprofundado das funções, e conseqüentemente, o aparecimento do conceito de taxa de variação associado a esse conteúdo aparece de forma explícita nessa etapa. A seguir, descreveremos os procedimentos realizados para chegar aos livros analisados.

Digitamos na barra de pesquisa do Google o seguinte comando: “livros didáticos de ensino médio adotados na Bahia 2025”. Dentre as opções sugeridas, encontramos, no *site* Bahia Já, uma notícia de 14 de julho de 2021, informando que as escolas da rede estadual de ensino estavam escolhendo os livros didáticos que seriam utilizados de 2022 a 2024. Em seguida, fomos direcionados ao guia do PNLD por meio desse endereço: https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2021_didatico/inicio. Na página inicial, selecionamos a área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, para conhecer as obras disponibilizadas para a escolha das escolas.

Ao todo, foram disponibilizadas dez coleções, das quais selecionamos as seguintes para a análise: Conexões- Matemática e suas Tecnologias, Prisma- Matemática e Matemática

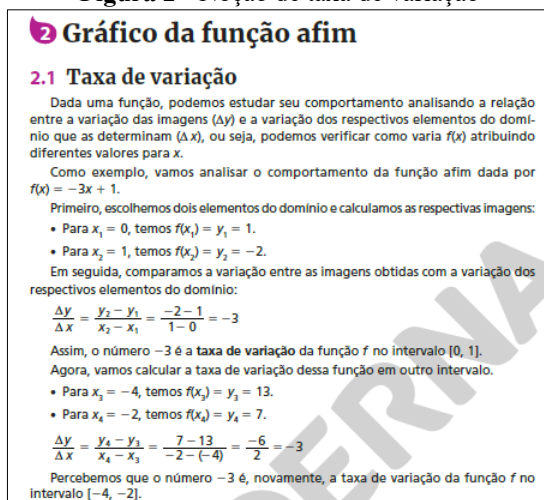
em Contextos. Escolhemos as obras que abordam os conteúdos de Funções. É importante destacar que as obras analisadas nesse trabalho foram escolhidas aleatoriamente; não conseguimos verificar quais delas estão, de fato, em circulação nas escolas da rede estadual de ensino da Bahia. Na próxima seção, analisaremos como o conceito de taxa de variação é abordado em livros da Educação Básica.

4 Análise dos livros didáticos

Após a apresentação inicial sobre a derivada, verificamos que esses objetos estão intrinsecamente relacionados ao estudo de funções. Além disso, observamos a presença do conceito de taxa de variação, o que nos permite compreender a noção de derivada por meio da variação da reta secante em torno da tangente. Portanto, nas análises dos livros didáticos, o nosso objeto de estudo foram as funções e como é abordado o conceito de taxa de variação.

Iniciamos nossa análise com o livro “Conexões- Matemática e suas Tecnologias: Funções e aplicações”. Observando o seu sumário, verificamos que apenas no conteúdo de função afim aparece o conceito de taxa de variação. O autor utiliza como abordagem o comportamento da função em relação à variação da sua imagem, à medida em que variamos os elementos do seu domínio em determinado intervalo. Conforme podemos observar na Figura 2.

Figura 2 - Noção de taxa de variação



Fonte: Leonardo (2020, p.18)

A noção apresentada pelo livro é semelhante à que analisamos na seção anterior, no sentido de que tomamos intervalos para verificar o comportamento dessa função. Como, nesse caso, trata-se de uma função afim, os exemplos mostram que essa variação é constante

para qualquer x_1 e x_2 escolhidos. Ao final da explicação, o autor apresenta uma generalização dessa ideia e conclui que a taxa de variação para uma função afim será igual ao coeficiente angular dessa função.

Figura 3 - Generalização da taxa de variação para uma função afim

Sabemos que uma função afim é definida por $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais.

Para $x = x_1$, temos $f(x_1) = y_1 = ax_1 + b$.

Para $x = x_2$, temos $f(x_2) = y_2 = ax_2 + b$.

Para $x_1 \neq x_2$, temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Note que a taxa de variação não depende do intervalo escolhido; ela sempre vale a .

A taxa de variação de uma função afim f , dada por $f(x) = ax + b$, é constante para qualquer intervalo do domínio e, numericamente, é igual ao coeficiente a .

Fonte: Leonardo (2020, p. 18)

Neste tópico, encontramos um exercício resolvido no qual foi utilizada a coordenada $(x, x + h)$, substituída na função $f(x) = -3x + 1$, do exemplo inicial, com o objetivo de mostrar que a taxa de variação é -3 , conforme visto nas resoluções iniciais, e que esse valor é correspondente ao coeficiente angular da função. Como podemos observar na Figura 4, essa ideia é enfatizada também no quadro com os valores do domínio e imagem da função, em que, para esse último verifica-se essa variação de -3 .

Figura 4- Exercício resolvido

Exercício resolvido

R2. Verificar que a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$ é igual ao coeficiente de x , ou seja, -3 .

► **Resolução**

Consideremos x e $x + h$ (com $h \in \mathbb{R}^*$) dois elementos do domínio.

- $f(x) = -3x + 1$
- $f(x + h) = -3(x + h) + 1 = -3x - 3h + 1$

Assim: $\frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{-3x - 3h + 1 - (-3x + 1)}{h} = \frac{-3x - 3h + 1 + 3x - 1}{h} = \frac{-3h}{h} = -3$

Portanto, a taxa de variação da função de lei $f(x) = -3x + 1$ é -3 .

Observe novamente que a taxa de variação encontrada (-3) é igual ao coeficiente a da função.

Quando o valor de x aumenta 1 unidade, o valor de $f(x)$ decresce 3 unidades; quando o valor de x aumenta 2 unidades, o valor de $f(x)$ decresce 6 unidades; e assim por diante.

x	$f(x) = -3x + 1$
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5

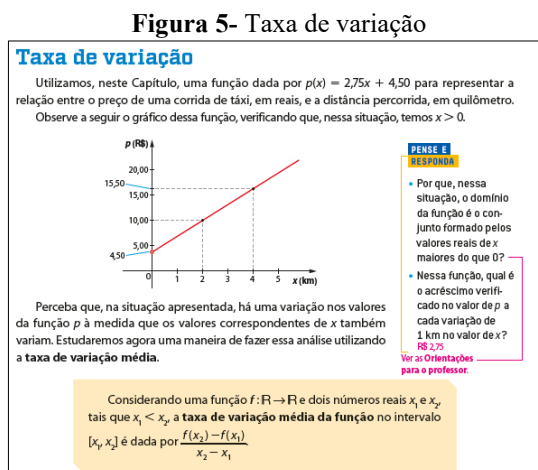
Diagrama de setas indicando a variação: de $x = -1$ para $x = 0$ (+1), $f(x)$ varia de 4 para 1 (-3); de $x = 0$ para $x = 1$ (+1), $f(x)$ varia de 1 para -2 (-3); de $x = 1$ para $x = 2$ (+1), $f(x)$ varia de -2 para -5 (-3). Também há uma seta de $x = -2$ para $x = 0$ (+2), onde $f(x)$ varia de 7 para 1 (-6).

Fonte: Leonardo (2020, p. 19)

Notamos que não há, neste livro, a utilização do gráfico da função como apoio para mostrar essa variação e justificar o intervalo apresentado na generalização, $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = y_2 - y_1$, ou ainda, x e $x + h$. Tendo em vista que esse tópico está associado à seção sobre o gráfico da função, consideramos esse recurso importante para o reconhecimento desses elementos no gráfico e sua transposição para o estudo de outras funções. Assim como, para o uso dessa noção em situações que não são descritas explicitamente por uma função,

mas por meio de um gráfico, e para apresentar esse coeficiente angular como sendo a inclinação da reta, conforme vimos na seção sobre a reta tangente e a derivada.

O segundo livro pertence a coleção “Prisma- Matemática: Conjuntos e funções”. O conceito de taxa de variação é apresentado no capítulo sobre função afim. Do mesmo modo que, no primeiro livro essa noção também aparece na seção sobre o gráfico da função.



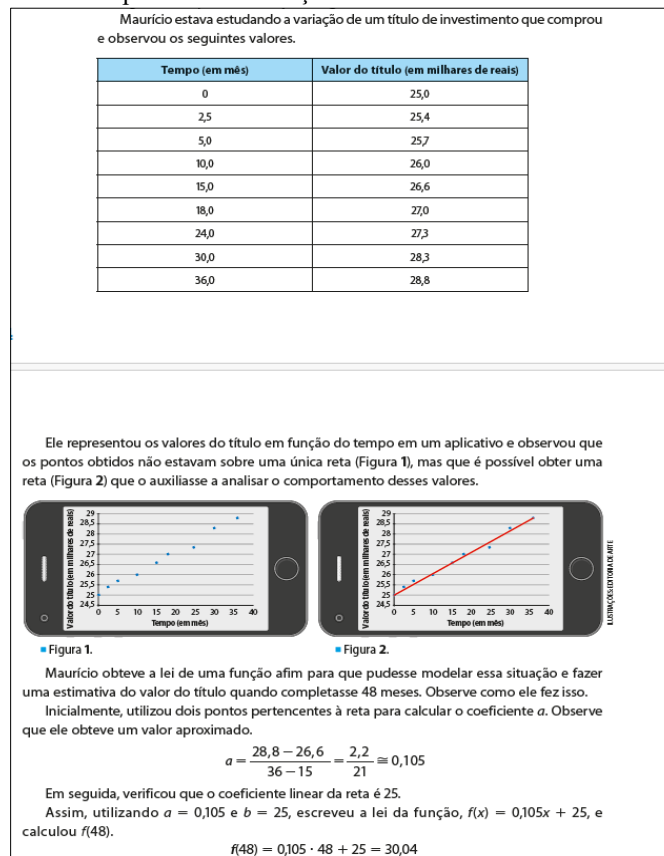
Fonte: Bonjorno, Júnior e Sousa (2020, p. 93)

Observamos que, nesse livro, há uma apresentação do gráfico da função e o destaque de dois pontos distintos, que poderiam ser explorados para mostrar a taxa de variação dessa função e como esse resultado corresponde ao coeficiente a da função. Os autores apontam que há uma variação nos valores da imagem função à medida que variamos os valores do domínio, e esse comportamento é denominado por taxa de variação. Em seguida, mostram a fórmula e como ela foi obtida.

Apesar do gráfico, não fica claro que os elementos são o quociente dos termos $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Assim como o primeiro livro, a conclusão é de que o valor obtido será o coeficiente angular da função. Porém, para que o estudante possa constatar esse fato, é necessário uma mediação do professor por meio do item Pense e Responda. Após a conclusão sobre a taxa de variação da função afim, os autores mostram como são conhecidos os termos da função e seu papel no gráfico. Para o coeficiente angular, apresentam que o valor está relacionado à inclinação da reta.

Nesse livro, chama-nos a atenção o exemplo da Figura 6, sobre a variação de um título de investimento, representado por meio de uma tabela e, posteriormente, transposto para a forma de um gráfico.

Figura 6- Exemplo sobre a variação de um título de investimento



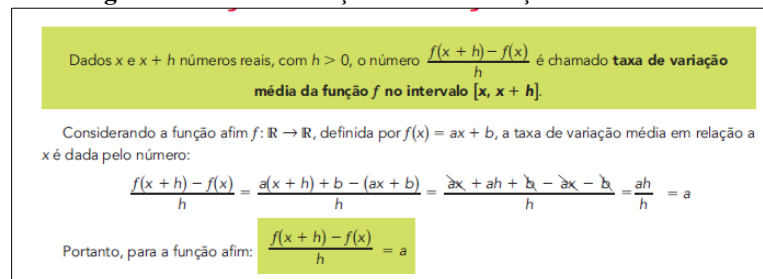
Fonte: Bonjorno, Júnior e Sousa (2020, p. 94-95)

Podemos observar que, inicialmente, são dadas apenas as informações sobre o tempo e a valor do título naquele mês, ou seja, não há uma descrição explícita da função associada ao exemplo. Como forma de descobri-la, são marcados pontos sobre o gráfico e utilizada a fórmula da taxa de variação para encontrar a lei de formação dessa função.

Percebemos uma ideia parecida com os problemas que são analisados nas Ciências, que mostram a relação entre a taxa de variação e a derivada, conforme discutimos na seção anterior. Também é possível aproveitar situações parecidas com essa para explorar a taxa de variação em curvas, como por exemplo, na função quadrática, mostrando que nem sempre essa variação será constante, como ocorre na função afim. Através desses exemplos, conseguimos mostrar, intuitivamente, a noção de derivada como a taxa de variação.

O terceiro livro é o “Matemática em Contextos: Função afim e função quadrática”. Assim como nos casos anteriores, o conceito de taxa de variação é abordado apenas no conteúdo de função afim. Os autores iniciam mostrando a sua definição e sua generalização para essa função. Para isso, eles escolhem o intervalo fechado determinado por x e $x + h$, para representar essa variação de posição no gráfico da função, conforme observamos na Figura 7.

Figura 7- Taxa de variação média da função afim

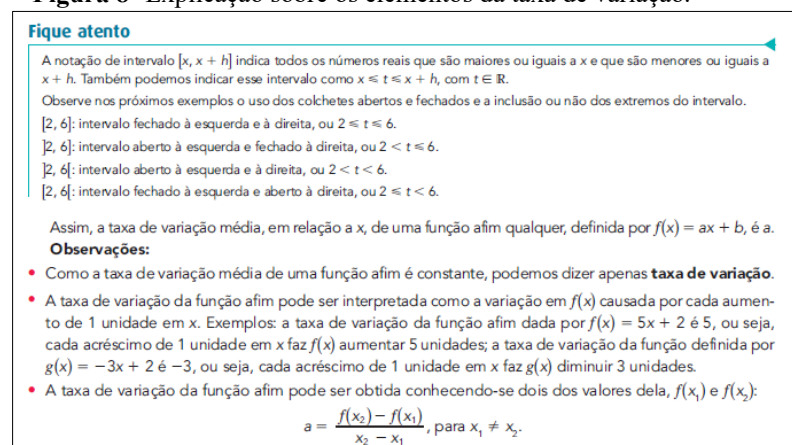


Fonte: Dante e Viana (2020, p. 28)

Os autores concluem que o coeficiente angular da função afim será correspondente à sua taxa de variação, embora isso não fique evidente na explicação inicial. Com isso, queremos dizer que os autores não mostram essa ideia por meio da língua materna; essa ideia fica implícita na generalização.

O livro propõe também uma explicação sobre o intervalo $[x, x+h]$, por meio de exemplos numéricos e outras representações. Porém, não há, nesse tópico, a presença do gráfico da função, um recurso importante para compreender essa variação e esses elementos. Além disso, não há exemplos resolvidos por meio da fórmula, mostrando como encontrar essa taxa de variação. Os autores apontam que essa variação é constante em todo o gráfico e, nas funções apresentadas, deixam de forma implícita que a taxa de variação da função afim é o seu coeficiente angular. Como podemos observar na Figura 8.

Figura 8- Explicação sobre os elementos da taxa de variação.



Fonte: Dante e Viana (2020, p. 28)

Ao final, temos outra representação para essa taxa de variação. Nesse caso, compreendemos que os autores queriam mostrar essa definição associada à noção de dependência da variável $f(x)$ em relação a x . Ou seja, variações em x provocam variações correspondentes em $f(x)$.

Desse modo, compreendemos que para a Educação Básica o conceito de taxa de variação possui como intencionalidade o estudo das variações em um dado intervalo da função afim, observando que essa variação é constante e que a partir dela é possível determinar os valores da imagem da função. Não possuindo relação com a inclinação da reta secante e tangente como ocorre no Ensino Superior para determinar a derivada. No entanto, pensando na prática pedagógica do professor, em nossa AEP podemos enfatizar o seu estudo desse conceito para a construção da noção de derivada por meio de um estudo dinâmico, com situações que enfatizem o significado de Δx e Δy e o mostrem como representantes dessas variações, uma vez que representam os acréscimos ao longo dos intervalos nos eixos do gráfico da função.

Considerações finais

A partir dessa análise inicial, conseguimos identificar um ponto de interseção entre o Ensino Superior e a Educação Básica, observando o objeto de estudo da derivada, por meio da noção de taxa de variação. Embora, com finalidades distintas, podemos articular esse conceito em nossa AEP de modo a contribuir com a aprendizagem e construção do conceito de derivada, ao mesmo tempo que abordamos tópicos importantes para a prática docente.

Um ponto a ser destacado é a ausência dos gráficos para a exploração desse conceito por meio de seus intervalos. Além de serem úteis para exemplificar a questão do dinamismo da taxa de variação e derivada, os gráficos permitem uma compreensão mais dinâmica do conceito. Compreendemos que o conceito explorado dessa forma, sem associação as variações no gráfico e no comportamento da função, provoca uma visão estática, dificultando, em estudos mais aprofundados, a compreensão de comportamento da taxa de variação e da derivada de funções.

Portanto, para compor o estudo da nossa pesquisa de mestrado, com a finalidade de construir um Modelo Epistemológico de Referência (MER) que possibilite o desenvolvimento de uma Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) para o estudo da derivada por meio da taxa de variação, os próximos passos a serem dados são uma análise conforme a organização praxeológica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) nesses livros didáticos, a fim de fazer o levantamento dos tipos de tarefas, técnica, tecnologia e teoria que predominam no estudo da taxa de variação tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, tanto para revelar as praxeologias dominantes, tanto para compreender as

condições e restrições referentes as organizações praxeológicas da taxa de variação para o estudo de derivada que vivem na instituição livro didático da Educação Básica.

Além disso, para construir esse MER, também vamos investigar a presença de situações nos outros tipos de funções que permitam a aplicação da taxa de variação em sua análise. Desse modo, conseguiremos explorar essa técnica e outras com a finalidade de compreender a derivada no Ensino Superior a partir de elementos conhecidos e estudados na Educação Básica. Do mesmo modo, o levantamento de outras praxeologias, tornará o nosso MER capaz de construir/ reconstruir a forma como esse conteúdo é ensinado, indo além da manipulação mecânica dos procedimentos algébricos.

Esse estudo poderá proporcionar aos professores e estudantes da Licenciatura em Matemática uma reflexão acerca das nossas práticas e do pensamento matemático que construímos ao longo da Educação Básica. Isto é, chamar a atenção sobre como o ensino desassociado das razões de ser daquele objeto, contribui para as dificuldades no Ensino Superior. Assim como, propõe uma reflexão sobre as práticas de ensino nos cursos de Licenciatura que devem articular-se com as práticas na Educação Básica.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB) pela concessão da bolsa de mestrado e, ainda, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo fomento ao projeto de pesquisa *O Cálculo Diferencial e Integral: uma análise das tentativas de sua escolarização*.

Referências

ALMEIDA, Marcio Vieira de; IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo Igliori. Constructos teóricos de Tall para o ensino de derivada: considerações sobre a elaboração de um modelo epistemológico de referência. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 26, n. 3, p. 029–047, 2024. DOI: 10.23925/1983-3156.2024v26i3p029-047. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/66194>. Acesso em: 28 mar. 2025.

ALMOULOUD, Saddo Ag. A teoria antropológica do didático. In: ALMOULOUD, Saddo Ag. (org.). **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. p. 111–123.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara. Função afim. In: BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo

Roberto Câmara (org.). **Matemática: Conjuntos e Funções**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020. p. 93–95.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Acesso em: 6 nov. 2025.

CHAACHOUA, Hamid; BITTAR, Marilena. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 9, n. 1, p. 29-44, 2019. Disponível em: https://periodicos.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/297/200. Acesso em: 28 mar. 2025.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução: Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando César de Abreu. Função afim. *In*: DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando César de Abreu (org.). **Matemática em Conexões: Função afim e função quadrática**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020. p. 28.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo, SP: Atlas, 2002.

LEONARDO, Fabio Martins de. Função afim. *In*: LEONARDO, Fabio Martins (org.). **Conexões- Matemática e suas Tecnologias: Funções e aplicações**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020. p. 18.

OLIVEIRA, Luis Carlos Barbosa. **Estudo das três dimensões do problema didático da derivada de uma função**. 2022. 120 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2022

PEREIRA, José Carlos de Souza; NUNES, José Messildo Viana Nunes; ALMOULOU, Saddo Ag. Conexões transpositivas na perspectiva da elaboração de modelos epistemológicos de referência a partir de objetos da matemática escolar. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 26, n. 3, p. 328–347, 2024. DOI: 10.23925/1983-3156.2024v26i3p328-347. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/66940>. Acesso em: 28 mar. 2025.

STEWART, James. Limites e Derivadas. Tradução: EZ2Translate. *In*: STEWART, James (org.). **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1. p. 75 – 136.