REHIMEM
Revista História, Matemática e Educação Matemática

ENTRE O QUASE E O EXATO: O LIMITE MATEMÁTICO DO MUNDO REAL

BETWEEN THE ALMOST THE EXACT: THE MATHEMATICAL LIMIT OF THE REAL WORLD

Daniel Sales da Conceição[i]
Eliene Barbosa Lima[ii]

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma definição de limite de função tendo como ponto de partida situações do cotidiano, de modo a contribuir para a redução das dificuldades dos estudantes no estudo do Cálculo Diferencial. Sua pergunta diretriz foi: de que forma podemos introduzir o estudo de limite de função de modo a promover um aprendizado significativo para os estudantes? A proposta se mostra relevante porque, após uma revisão de literatura, percebeu-se que os estudantes que lidam com o estudo de limite em sua formação, incluindo futuros professores de matemática que atuarão na Educação Básica, têm dificuldades em mobilizar a definição de limite em contextos que extrapolam o campo estritamente matemático.

Palavras-chave: Cotidiano; Limite; Cálculo Diferencial.

ABSTRACT

This work aimed to present a definition of the limit of a function based on everyday situations, in order to help reduce students' difficulties in learning Differential Calculus. Its guiding question was: in what way can we introduce the study of limits so as to promote meaningful learning for students? This proposal is relevant because, after a literature review, it became evident that students who engage with the study of limits, including future mathematics teachers who will work in k-12 education, struggle to apply the definition of a limit in contexts outside the strictly mathematical field.

Keywords: Everyday; Limit; Differential Calculus.

Submetido: 21.10.2025
Aprovado: 10.02.2026

[i] Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Endereço para correspondência: Av. Transnordestina, s/n, Novo Horizonte, Feira de Santana, Bahia, Brasil, CEP: 44036-900. E-mail: danielsalesc358@gmail.com ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8314-3207. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9349210895409270

[ii] Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia/ Universidade Estadual de Feira de Santana (UFBA/UEFS). Professora titular da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Endereço para correspondência: Av. Transnordestina, s/n, Novo Horizonte, Feira de Santana, Bahia, Brasil, CEP: 44036-900. E-mail: eblima@uefs.br. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6928-5217. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8159944355847853

Considerações iniciais

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da matemática, que estuda as taxas de variação e a acumulação de quantidades. Esta área teve um grande impulso com os trabalhos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), no qual:

> [...] criaram um sistema coerente de métodos a fim de resolver problemas sobre curvas (quadraturas, tangentes, etc.). Seus métodos não dependeram da natureza especial das curvas tratadas. Portanto o alcance desses métodos foi mais amplo do que o dos métodos anteriores. Através de Newton e Leibniz os métodos infinitesimais chegaram a formar uma teoria coerente e poderosa. Em resumo, foi a obra deles que permitiu falar em cálculo pela primeira vez (Baron; Bos, 1985, p.69)

O Cálculo Diferencial está relacionado à derivada, que mede como uma função muda em relação às variáveis independentes, enquanto o Cálculo Integral, insere-se no âmbito da integral, concentrando-se na soma de infinitas partes para determinar áreas sob curvas. A ligação entre esses campos, diferencial e integral, de modo geral, envolve o estudo do limite, sendo formalmente estabelecida pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

A constituição do limite moderno foi impulsionada no início do século XIX pelos trabalhos de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e, posteriormente, formalizada, principalmente, por Karl Weierstrass (1815-1897) por meio da definição *épsilon* (ϵ)-*delta* (δ). Em suma, o limite tornou-se um conceito fundamental da matemática, que descreve o comportamento de uma função à medida que uma variável independente se aproxima de um determinado valor. Dito de outro modo, o limite nos ajuda a compreender o comportamento de uma Função quando estamos muito próximos de um valor específico, mesmo que ela não esteja definida nesse ponto.

Assim, o conceito formal de limite envolve o comportamento de uma função na vizinhança de um ponto, o qual é apresentado, inicialmente, nos cursos de Cálculo Diferencial. Nesse contexto, podemos citar a definição de limite apresentada por Nikolai Piskunov (1908-1977) em seu livro *Cálculo Diferencial e Integral*, o qual, segundo Conceição e Vasconcelos (2025), teve ampla influência em cursos de ciências exatas no Brasil entre as décadas de 1960 e 1990, por exemplo, no curso de Matemática da Universidade de São Paulo (USP), como também na Universidade Federal da Bahia (UFBA) (UFBA, 1980) e na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) (1980-1990). Na 9ª edição, publicada em 1982, em seu primeiro volume, Piskunov traz a seguinte definição de limite de uma função:

> Seja $y = f(x)$ uma função definida numa vizinhança do ponto a ou em certos pontos desta vizinhança. A *função* $y = f(x)$ *tende para o limite* b $(y \to b)$ *quando* x *tende para* a $(x \to a)$, se para cada número positivo ε, por mais pequeno que seja, se pode indicar um número positivo δ tal que para todos, os x diferentes de a e verificando a desigualdade
>
> $$| x - a | < \delta$$
>
> a desigualdade
>
> $$| f(x) - b | < \varepsilon$$
>
> é satisfeita. Se b é o *limite da função* $f(x)$ quando $x \to a$, escreve-se então
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = b$$
>
> ou $f(x) \to b$ quando $x \to a$. (Piskunov, 1982, p. 37).

Trata-se de uma definição que ainda está em conformidade ao rigor que é legitimado na comunidade matemática, na atualidade, isto é, estabelecido por métodos algébricos e abstratos da lógica axiomática. Isto porque, na definição podemos perceber que aparece os termos δ (Delta), ε (Épsilon), que representam grandezas infinitamente pequenas.

Tal conceito não é abordado atualmente na educação básica, pois exige um grau de abstração, que não é apropriado nesta etapa. Além disso, essa definição, na prática, só terá sentido quando buscamos provar teorias no campo da Análise Matemática, especificamente para o contexto do bacharelado. Neste caso, podemos nos questionar se uma apresentação da definição rigorosa de limite do curso de Cálculo Diferencial, é de fato necessária.

Tall e Vinner (1981), relatam que os alunos, em geral, frequentemente têm problemas em entender e manipular símbolos matemáticos como, por exemplo, $\forall$ (para todos) e $\exists$ (existe). Este obstáculo pode trazer dificuldades aos estudantes quando aplicações da definição de limite necessitarem desses e de outros quantificadores. Além disso, os escritores salientam que, ao tentar aplicar a definição formal em exemplos práticos, os alunos, muitas vezes, não conseguem reconhecer a ligação entre o conceito formal e as situações específicas. Isso é atestado em alguns exercícios em que os alunos não conseguem calcular o limite de forma correta, mesmo quando se têm a ideia do que está por trás do problema envolvido.

Um exemplo de exercício desse tipo, seria quando estamos tratando de uma função polinomial, qual seja $f(x)=x^2$. Sabe-se que o domínio de uma função polinomial no corpo dos números reais é todo o conjunto dos números reais. Como dito anteriormente, o limite é um conceito local e envolve a ideia de aproximação, ou seja, na vizinhança do ponto que se quer analisar.

Assim, neste caso específico, consideremos o ponto $x=3$. Entretanto, neste tipo de função, sabemos o que acontece exatamente no ponto em questão, pois ele está no domínio da função $f(x)=x^2$, o que remete simplesmente em aplicar o valor na função e achar a sua imagem, $f(3)=9$. Mas, o que acontece geralmente nos cursos de Cálculo Diferencial é que na questão vem pedindo "prove que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$".

Observe que o que poderia ser algo simples acaba exigindo, inicialmente, manipulação da expressão $0 < | x - 3 | < \delta$, com o objetivo de encontrar um resultado $| f(x) - 9| < \varepsilon$, onde δ está em função de ε, ambos positivos. Esse processo costuma trazer dificuldades aos estudantes, mesmo quando o professor, posteriormente, trabalha com limites fundamentais e propriedades de limite. Essas situações acabam impactando a compreensão dos estudantes no conteúdo e, consequentemente, em seu o desempenho na disciplina.

Ao realizar uma breve análise dos dados dos diários de classe da disciplina de Cálculo Diferencial da UEFS, no período de 2022.1 a 2024.2, percebemos que a primeira atividade avaliativa é, majoritariamente, composta pelo conteúdo de limite. Ele é apresentado, inicialmente, pela noção intuitiva e, em seguida, de maneira formal, incluindo temas como limites laterais, limites no infinito, limites fundamentais, entre outros (UEFS, 2022-2024).

Com esses dados analisados, construímos a seguinte tabela[3]:

Tabela 1 – Dados da disciplina de Cálculo Diferencial da UEFS, no período de 2022.1 a 2024.2

Semestre	Reprovados na 1ª Prova	Total de Alunos	Desistências	Reprovações no Final	Reprovação com desistentes	Reprovação sem desistentes
2022.1	12 de 22 (54,55%)	26	4	14	53,85%	45,45%
2022.2	6 de 23 (26,09%)	26	3	7	26,92%	17,39%
2023.1	13 de 23 (56,52%)	28	5	16	57,14%	47,83%
2023.2	13 de 19 (68,42%)	26	7	18	69,23%	57,89%
2024.1	12 de 20 (60%)	37	17	28	75,68%	55%
2024.2	12 de 21 (57,14%)	26	5	15	57,69%	47,62%
MÉDIA	**53,79%**	**29**	**7**	**17**	**56,75%**	**45,03%**

Fonte: Elaborado pelo primeiro autor

[3] Para essa produção, consideramos reprovados na primeira prova aqueles estudantes que tiraram notas inferior a 5 pontos. Vale ressaltar que interpretamos como desistência os alunos que tiraram 0 nas três avaliações. Sendo assim, não analisamos estes estudantes na reprovação da primeira prova.

A Tabela 1 evidencia que a taxa de reprovação na primeira avaliação – média, cerca de mais de 50% – indica dificuldades iniciais no entendimento dos conceitos, em particular no que diz respeito ao limite. Isso pode sinalizar a necessidade de um reforço ou de mudanças no ensino desse conteúdo. Além disso, a taxa de reprovação na primeira prova está muito próxima da taxa registrada ao final do semestre, com uma diferença de 3% (considerando os desistentes) e 7% (sem desistentes). Ou seja, a primeira prova parece ser um forte indicador do desempenho final dos estudantes.

Por esse prisma, este trabalho, desenvolvido no âmbito de uma Iniciação Científica[4], teve como objetivo apresentar uma definição de limite de função tendo como ponto de partida situações do cotidiano, de modo a contribuir para a redução das dificuldades dos estudantes no estudo do Cálculo Diferencial. Em especial, para que os estudantes obtenham melhores resultados na primeira prova e, consequentemente, aumentem suas chances de aprovação na disciplina. Para isso, desenvolvemos este trabalho com base na seguinte pergunta diretriz: de que forma podemos introduzir o estudo de limite de função de modo a promover um aprendizado significativo para os estudantes?

1 Definição intuitiva de limite de uma função

No ensino do Cálculo Diferencial e Integral, em algumas práticas, os autores ou professores começavam o assunto de limite com a sua noção intuitiva, ou seja, uma abordagem em que a ideia de limite antecede a formalização rigorosa de sua definição. Tal prática reflete um caminho para tentar amenizar as dificuldades que os alunos enfrentam com a definição formal em termos de épsilon e delta.

Entre os autores que defendiam a prática da noção intuitiva, segundo Ávila (2002), estavam Serge Lange (1927-2005) e Bob Seeley (1932-2016), representantes da escola americana de matemática, que optaram por uma abordagem diferente para o Cálculo Diferencial, no qual "[...] reconheciam que não era realista ensinar a teoria rigorosa do limite no início de um curso [...]" (Ávila, 2002, p. 84). Em convergência a esses autores, Ávila (2002), considerava que o rigor do limite só deveria ser apresentado após as definições de

[4] Esse estudo está vinculado ao projeto de pesquisa *O Cálculo Diferencial e Integral: uma análise das tentativas de sua escolarização*, financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Derivada. Stewart[5] (2013) parece seguir essa premissa, tanto que em seu livro, introduz o limite de uma função da seguinte forma:

> Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L" se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a (Stewart, 2013, p. 81).

Podemos observar que, nesta definição, Stewart (2013), não apresentou elementos como $|x - a| \leq \delta$, $|f(x) - L| \leq \varepsilon$, os quais foram enunciados, por exemplo, por Piskunov (1982). Ao invés disso, Stewart (2013) opta por substituir a linguagem matemática por uma linguagem materna, explicando o que esses elementos, que conferem rigor à definição, significam. Entretanto, o autor mantém a estrutura da definição rigorosa. Na nossa concepção, isso não resolve o problema da dificuldade dos estudantes, em geral, com a definição de limite.

Dessa forma, não é suficiente que uma definição intuitiva se afaste apenas dos termos δ e ε; é necessário que ela apresente um significado compreensível para o leitor, especialmente para os estudantes de Cálculo Diferencial, que estão em processo de familiarização com essa nova linguagem, sua notação e conceitos. Em nossa concepção, uma forma de auxiliar os estudantes nessa inserção é recorrer a aspectos presentes tanto no contexto escolar quanto no cotidiano deles. Segundo Giardinetto (1999), a utilização de conhecimentos prévios dos alunos, como situações do cotidiano, é importante para uma melhor compreensão do conteúdo. Entretanto, ressalva o autor, esse conhecimento não deve constituir toda a estrutura do conceito escolar, sendo preciso que as situações do dia a dia sejam tomadas como ponto de partida, e não como o meio para o domínio do conhecimento sistematizado.

[5] James Stewart (1941- 2014) é famoso por seus livros didáticos de cálculo, que são amplamente utilizados em cursos universitários ao redor do mundo. Seu livro mais conhecido, "Cálculo", não raramente é utilizado como bibliografia básica das disciplinas de Cálculo I (Cálculo Diferencial) e II (Cálculo Integral) da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).

É em consonância com esse pensamento de Giardinetto (1999) que nossa proposta foi elaborada, buscando diminuir as dificuldades apresentadas pelos estudantes no estudo do Cálculo Diferencial.

2 Limite no cotidiano

Em nosso dia a dia, estamos cercados por limitações, paredes invisíveis que delimitam ou cercam determinados objetos, ou espaços. Um exemplo é a rede de Wi-Fi, a qual funciona mediante ondas de rádio para transmitir dados entre dispositivos. Quando um dispositivo Wi-Fi é ativado, ele procura redes disponíveis e se conecta ao roteador, enviando uma solicitação de conexão e permitindo a comunicação e o acesso às informações de maneira conveniente. No entanto, há um ponto em que a rede deixa de funcionar, ou seja o sinal atingiu o seu limite. Será que, na Matemática, o limite sempre existe ou é necessariamente alcançado? Existe diferença entre o conceito de limite utilizado pelas pessoas no cotidiano e aquele utilizado na Matemática?

Anteriormente vimos que o limite matemático é fundamental no campo da Análise Matemática, sendo utilizado para descrever o comportamento de funções à medida que a variável independente se aproxima de determinado valor, indicando o valor para o qual a variável dependente tende nessas condições. De outra parte, ao consultarmos um dicionário, "limite" apresenta diversas definições: *1.* Linha de demarcação. *2.* Divisão, fronteira. *3.* Ponto extremo; fim. *4.* Ponto que não se deve ou não se pode ultrapassar (Ximenes, 2000, p. 582).

Sob essa perspectiva, a palavra "limite" assume múltiplos significados em nosso cotidiano. Por exemplo, pense nos muros que separam o seu terreno do seu vizinho, funcionando como uma linha de demarcação. Ao considerarmos um condomínio, em que os terrenos das casas têm as mesmas dimensões, podemos então considerar que a *vizinhança* de uma casa será determinada pelas casas que estão ao redor, à direita e à esquerda, e o limite dessa vizinhança será dado pela linha de marcação do muro da primeira em relação à última casa da rua.

Na matemática, *vizinhança* pode ser entendida de forma semelhante, mas em termos mais abstratos: dado um ponto x_0 na reta, ao escolhermos uma distância, tanto à direita quanto à esquerda, obteremos incontáveis elementos *x* que fazem parte desse espaço, ou seja, a comunidade de elementos que tem como centro o x_0. Formalmente, a vizinhança aberta de

x_0 pode ser definida como V = {$x \in R$: $|x - x_0| < \epsilon$}, em que ϵ representa a distância escolhida, ou desejada.

O limite, entendido como uma divisão ou fronteira, pode ser ilustrado em um mapa, no qual as fronteiras entre os países indicam onde um termina e o outro começa. Por esse prisma, a linha que separa o Brasil da Argentina, por exemplo, é um limite geográfico que define a soberania de cada nação. No entanto, para a existência dessas fronteiras, é necessário um *consenso*, ou seja, um acordo que estabeleça que tanto o Brasil quanto a Argentina reconheçam a mesma demarcação.

Compreender o limite como um ponto extremo ou final pode ser ilustrado pela técnica Mukagen, uma barreira defensiva automática utilizada pelo personagem Satoro Gojo, da série Jujutsu Kaisen. Qualquer objeto ou ataque que tenta atingir Gojo desacelera progressivamente à medida que se aproxima, parando completamente antes de tocá-lo, como se estivesse tentando cruzar uma distância infinita. Nesse caso, o limite do ataque é o próprio Gojo, que representa o ponto máximo a ser alcançado para completar a ofensiva. Esse limite, portanto, é um objetivo claro, mas inalcançável. Nesse contexto, a forma como o golpe *varia* ao longo de cada espaço de tempo determina o seu limite.

Um limite também pode indicar um ponto que não deve ser ultrapassado, seja por razões de segurança ou por regras sociais. Em um jogo de futebol eletrônico, por exemplo, no *EA FC 25*, os 22 jogadores, durante a partida, só podem se movimentar dentro do cenário até onde há grama, ou seja, não podem ultrapassar determinadas áreas. Quando esses limites são desrespeitados, ocorrem *bugs* ou até mesmo o fim do jogo, como no caso de *God of War* e outros jogos de console. Isso acontece porque a área além do limite não está *definida* para aquele comando, tornando impossível prosseguir.

Na Matemática, sabe-se que $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, existe em duas situações. A primeira acontece quando a variável do domínio tende a um valor e o limite é exatamente a imagem desse valor pela função, como em $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$, no caso de o ponto ser contínuo na função. A segunda ocorre quando o limite também existe, mas o resultado não é o ponto aplicado na função, como em $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, no caso de o ponto não pertencer ao domínio da função. Nesse sentido, a primeira situação está relacionada ao campo de futebol apresentado, onde os jogadores podem alcançar o limite – as linhas que determinam o campo – mas não podem ultrapassá-lo. Já a segunda situação se relaciona à técnica Mukagen de Gojo, em que o limite existe, mas não pode ser alcançado.

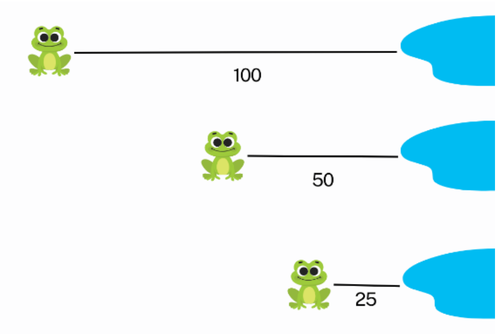
Em suma, os limites estão presentes em diversas áreas da vida, desde a delimitação de espaços físicos até regras sociais e pessoais. A partir desses limites, podemos assimilar conceitos como *vizinhança*, *consenso*, *variação* e *definição*, para construir um conceito de limite na Matemática. Isso pode possibilitar aos estudantes atribuírem significados ao seu uso não apenas na Matemática, mas também em vários outros contextos. Essa abordagem difere da apresentada pelo matemático canadense James Stewart, que utiliza, em seu livro, noções consideradas intuitivas de limite como uma forma preliminar à definição formal.

3 Redefinindo o limite, numa perspectiva a partir do cotidiano

Para responder à pergunta diretriz, desenvolvemos nossa proposta a partir de uma problemática envolvendo o limite de uma sequência.

> Próximo à margem de uma lagoa, há uma rã que deseja chegar a esta lagoa. No entanto, ela se move seguindo uma lógica peculiar: a cada salto, pula metade da distância que a separa do lago. Considerando que a rã está a 100 metros da água, em que momento ela alcançará a lagoa, ou seja, quando a distância até o lago se tornará zero?

Figura 1 – Rã indo para a lagoa



Fonte: Elaborada pelo primeiro Autor

Este problema logo de início parece que pode ser resolvido com poucas tentativas. A posição inicial da rã é 100 metros (Figura 1), após o primeiro pulo a rã está a 50 metros, posteriormente, no segundo pulo, a rã já está a 25 metros. Assim, podemos nos questionar: quantos pulos a rã dará até atingir o lago? Serão mais de 100 pulos? Menos de 100 pulos? É possível determinar um número exato? Ao tentar responder a estes questionamentos, é natural tentar calcular a maior quantidade de pulos até finalmente a rã chegar ao lago. Entretanto, um fato curioso é que, mesmo após 500 pulos, a rã ainda não terá alcançado o lago. Dado isso, é possível analisar de outra forma o comportamento da rã?

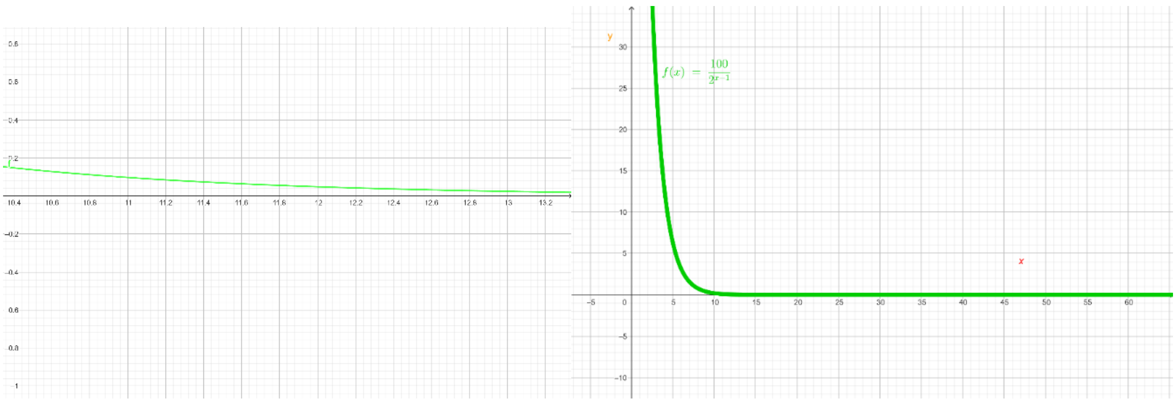
Para resolver esse problema, precisamos entender o que está acontecendo em relação às distâncias encontradas. Se elencamos as cinco primeiras distâncias, formamos o conjunto $P_5 = \{100, 50, 25, 12.5, 6.25\}$. Conforme o enunciado, sabemos que a próxima distância será sempre a metade da anterior. Assim, se a rã se encontra em uma distância *K*, do lago, no próximo salto ela estará a K/2. Isso nos leva a perceber que estamos lidando com uma progressão geométrica (PG), que é "[...] uma seqüência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente. Esse quociente constante é representado por q e chamado de razão" (Morgado, 2001, p. 20).

Em uma PG os elementos da sequência são denominados de a_n, onde o índice n determina a posição dos termos, o qual pode ser obtido utilizando a equação geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que a_1 é o primeiro termo e q representa a razão, isto é, o valor que multiplicamos para obter o próximo termo. Reescrevendo a equação geral a partir do problema proposto, temos que $a_n = \frac{100}{2^{n-1}}$. Como o nosso objetivo é chegar na distância 0, então considere $a_n = 0$; isso significa que $0 = \frac{100}{2^{n-1}}$, ou seja, é necessário achar uma potência de 2 de forma que ao dividir 100 por essa potência de 2, o resultado seja zero.

Fazendo algumas operações na equação, multiplicando 1/100 em ambos os lados e, posteriormente, elevando ambos os lados à potência -1, chegamos a um resultado $0 = 2^{n-1}$. Matematicamente, esse resultado é um absurdo, pois 2 elevado a qualquer número nunca será zero, ou seja, não existe um n natural que satisfaça a equação, logo, a rã nunca alcançará o lago.

Podemos visualizar a natureza do problema por meio de um gráfico (Figura 2) representado por uma função similar à equação geral da PG: $f(x) = \frac{100}{2^{x-1}}$

Figura 2 – Função determinada pelo pulo da rã



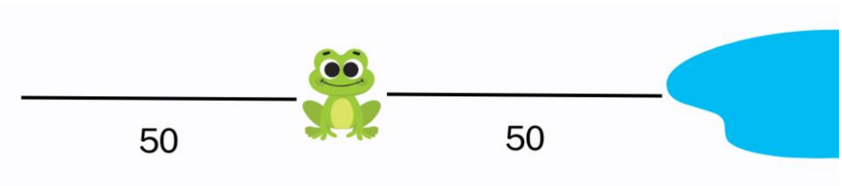
Fonte: Elaborada pelo primeiro Autor

Observando o gráfico, em que o eixo *x* (a reta horizontal do plano cartesiano) representa a quantidade de saltos da rã e o eixo *y* a distância percorrida em relação à quantidade de pulos, percebemos que, à medida que o número de saltos aumenta, a rã se aproxima cada vez mais de zero. Como o zero é inalcançável, dizemos então que ele não está *definido*. Neste caso, existe uma barreira no valor zero que a rã jamais ultrapassará. Assim, pela quarta definição do dicionário - ponto que não se deve ou não se pode ultrapassar - consideramos que 0 é o limite de distância percorrida.

Podemos, também, estabelecer mais conexões com os significados e conceitos matemáticos ao analisar o que pode significar termos como *vizinhança*, *consenso* e *variação*, mencionados anteriormente.

Começando pela *vizinhança*, como já foi visto, na matemática, é necessário estabelecer um centro, a partir do qual se estabelece a mesma distância para os dois lados. De forma prática, se estamos tratando de um condomínio, ao estabelecer uma distância de duas casas a partir da casa central, teremos então a certeza de que pelo menos uma casa faz parte dessa vizinhança. No caso da rã, ao considerarmos um espaço percorrido no primeiro pulo, ela está, de certa forma, estabelecendo uma *vizinhança*, na qual, à direita e à esquerda, existe um espaço de 50 metros (Figura 3).

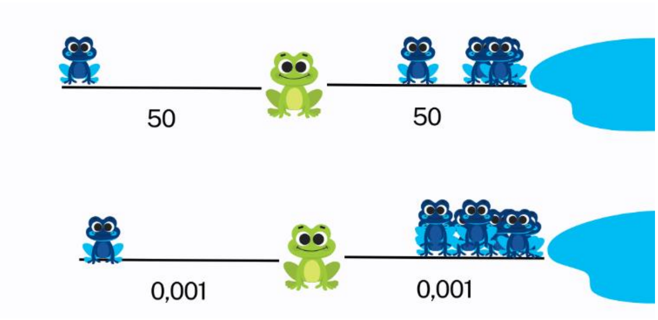
Figura 3 – Vizinhança da rã



Fonte: Elaborada pelo primeiro Autor

É necessário agora garantir que haverá pelo menos um elemento nessa vizinhança. Para isso, precisamos entender como o nosso elemento percorre esse espaço. Dito isso, *variação* no contexto matemático significa o ato de alterar de acordo com uma lei estabelecida. No exemplo, a lei estabelecida foi $a_n = \frac{100}{2^{n-1}}$, o que implica que a nossa rã varia no espaço de metade em metade, começando a partir da distância 100. Observe que, a partir da distância de 50 metros, existem infinitas posições que a rã poderá ocupar, garantindo que, dentro desse raio da vizinhança, aconteçam variações de posição. Note também que quanto mais próximo do limite zero, mais próximas serão essas variações (Figura 4). Portanto, quanto menor for a vizinhança estabelecida, maior será a garantia que quase todo o espaço da vizinhança será preenchido por elementos, pois os pulos estarão bem próximos um do outro.

Figura 4 – Vizinhança da rã



Fonte: Elaborada pelo primeiro Autor

Se considerarmos o vigésimo pulo da rã, a distância até o lago será de aproximadamente 0,00019 metros. Podemos, então, estabelecer uma vizinhança desse tamanho, que estará mais próximo do ponto 0 do que a do décimo nono pulo, e podemos fazer isso com cada pulo subsequente, infinitamente. Logo, concluímos que, quanto mais pulos a rã der, mais próxima da distância zero ela ficará (ou seja, ela estará, provavelmente, mais próxima de alcançar o lago), e quanto mais próxima do zero for a vizinhança, mais aparentes serão os elementos que fazem parte dela.

Sendo assim, podemos chegar a um consenso de que uma vizinhança de tamanho ínfimo, formada por um número inimaginavelmente grande de pulos, se avizinhará tão próximo do zero ao ponto de serem indiferenciáveis. Neste caso, dizemos que a rã alcançou seu limite, no decurso dos saltos efetuados. Assim, na expressão $0 = \lim_{n \to \infty} \frac{100}{2^{n-1}}$, compreende-se que zero é o limite da (sequência em questão), quando n tende para o infinito.

Dessa forma, podemos dizer que o ponto (linha de chegada de uma determinada locomoção), seja ele definido ou não, é limite de uma sequência s_n, lei de variação dos elementos, quando, ao estabelecer a vizinhança na locomoção, a distância entre o centro da vizinhança e o ponto torna-se irrisória (irrelevante).

A partir disso, podemos chegar à definição de limite de uma variável como sendo: o limite de uma sequência, onde sua variação ocorre à direita e à esquerda do ponto, a partir de uma distância fixada, isto é, previamente estabelecida.

Por fim, concluímos que o limite de uma função será o limite de uma variável dependente (neste caso no eixo y), onde essa variação depende da função estabelecida. Para isso, escolhemos uma vizinhança do ponto em y_0, onde é necessário também haver uma vizinhança em x_0, na qual as imagens y dos elementos de x, da vizinhança em x_0, estejam na vizinhança de $y_0 = f(x_0)$.

Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma definição de limite de função tendo como ponto de partida situações do cotidiano, de modo a contribuir para a redução das dificuldades dos estudantes no estudo do Cálculo Diferencial. Sua pergunta diretriz foi: de que forma podemos introduzir o estudo de limite de função de modo a promover um aprendizado significativo para os estudantes?

A possibilidade de ensinar o limite matemático como uma definição em si, e não apenas como uma etapa preliminar para sua formalização, surge das leituras que tomam a matemática como um conhecimento cultural. Com base nesses estudos, compreendemos que, ao abordar o conceito de limite de forma a favorecer a construção de significados pelos estudantes, torna-se possível ampliar o entendimento e o uso desse conteúdo em diversos contextos.

Essa perspectiva nos permite perceber que o conhecimento matemático não é um produto acabado e que, historicamente, a aplicação de seus conceitos nem sempre esteve fundamentada em teorias rigorosas. Além disso, é importante compreender que, em cada época, havia um rigor específico que orientava o desenvolvimento da matemática naquele contexto. Por isso, é necessário frisar que considerar o intuitivo apenas como uma etapa rumo à formalização reforça uma visão linear e contínua da matemática. Assim, é preciso reconhecer que as definições de cada período eram, dentro de seus próprios critérios, as mais rigorosas possíveis. Descartá-las, portanto, implica, na nossa concepção, desconsiderar todo o processo histórico de construção do conhecimento matemático.

Desse modo, ao elaborarmos a proposta apresentada, que se distancia do que tradicionalmente é visto, compreendemos que os conceitos matemáticos não são apenas teorias abstratas, mas também podem funcionar como ferramentas práticas, cuja finalidade varia conforme o contexto de uso. Essa perspectiva pode contribuir para tornar a matemática mais significativa para estudantes que lidam com o estudo de limite em sua formação, incluindo futuros professores de matemática na Educação Básica, ao possibilitar a aplicação desse conceito em contextos que extrapolam o campo estritamente matemático.

Essa reflexão é importante para quem lida com o Cálculo Diferencial, pois pode ajudar a responder uma dúvida comum, sobretudo, entre os estudantes de Licenciatura em Matemática, que ao se depararem com inúmeras demonstrações e conjecturas, costumam questionar: afinal, os objetivos do professor de matemática são os mesmos que os de um matemático? Fazer essa distinção é fundamental para entender de que forma cada um pode contribuir para o desenvolvimento de um ensino de matemática mais democrático. Nesse sentido, embora a proposta aqui apresentada se alinhe a essa perspectiva, ela ainda não foi experienciada com os estudantes, algo que será essencial para avaliarmos sua eficácia na promoção de um ensino significativo do conceito de limite.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), mediante aprovação na Chamada CNPq/MCTI/FNDCT nº 18/2021 – Universal, faixa A, e também por meio de bolsa de Iniciação Científica concedida ao primeiro autor, aprovada pelo Edital PPPG-IC/UEFS nº 01/2024.

Agradecemos, ainda, ao Prof. Jorge Costa do Nascimento pela leitura atenta da primeira versão deste texto e pelas críticas pertinentes.

Referências

ÁVILA, Geraldo. O Ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, n. 33, p. 83-95, dez. 2002.

BARON, Margaret E.; BOS, Henk Jan M. **Curso de História da Matemática**: origens e desenvolvimento do Cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985. [Unidade 3 – Newton e Leibniz).

CONCEIÇÃO, Daniel Sales da; VASCONCELOS, Ana Libni. Um estudo da definição de limite pelo livro Cálculo Diferencial e Integral de Piskunov. **Revista História, Matemática e Educação Matemática**, Feira de Santana, v. 1, n. 1, p. 20-31, 2023. Disponível em: https://periodicos.uefs.br/index.php/rehimem/article/view/11883/9709. Acesso em: 13 ago. 2025.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana**. Campinas, SP: Autores Associados, 1999. (Coleção Polêmicas do nosso tempo, v. 65).

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. **Progressões e Matemática Financeira**. 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001

PISKUNOV, Nikolai**. Cálculo Diferencial e Integral**. 9. ed. Porto: Lopes da Silva,1982.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. [v.1]

TALL, David.; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

UEFS [UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA]. Colegiado de Licenciatura em Matemática. **Diarios de classe da disciplina Cálculo Diferencial.** Feira de Santana: Arquivo do Colegiado de Licenciatura em Matemática – UEFS, 2022-2024.

XIMENES, Sérgio. **Minidicionário Ediouro da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Ediouro, 2000.