UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
PPPG
XXVII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2023

Grupos Topológicos

Gleberson Gregorio da Silva Antunes[1] **e Kisnney Emiliano de Almeida**[2]

[1]Bolsista FAPESB, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: glebersonset@gmail.com
[2]Orientador, DEXA, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: kisnney@gmail.com

PALAVRAS-CHAVE: Topologia; Grupos; Grupos Topológicos.

INTRODUÇÃO

Sophus Lie foi um notável matemático norueguês que desempenhou um papel fundamental no estudo de grupos topológicos. No entanto, durante a sua época, a definição moderna de espaço topológico ainda não havia sido formulada. Sua contribuição para a matemática concentrou-se principalmente no estudo dos grupos de Lie, que constituem uma importante classe de grupos topológicos.

A noção contemporânea de espaço topológico, como conhecemos hoje, só foi formalizada muito depois da morte de Lie, graças ao trabalho do matemático alemão Felix Hausdorff. Sendo assim, a definição de grupo topológico surge bem depois, por meio da contribuição de matemáticos que seguiram os passos pioneiros de Lie.

Os grupos topológicos são estruturas matemáticas interessantes e que possuem aplicações em diversas áreas da matemática e de outras ciências. Eles combinam uma estrutura algébrica (um grupo) com uma estrutura topológica (uma topologia), criando uma poderosa interação entre esses dois aspectos. Essa interação é fundamental para a obtenção de resultados interessantes.

Durante nossa pesquisa, investigamos diversos resultados relacionados aos grupos topológicos. Estudamos um critério para determinar se um grupo munido de uma topologia pode ser considerado um grupo topológico, analisando as vizinhanças do elemento neutro do grupo. Investigamos também as interações entre as propriedades algébricas e topológicas de subgrupos e grupos quocientes, analisando como essas estruturas se relacionam e influenciam umas às outras. Essas investigações são fundamentais para compreender em profundidade as estruturas dos grupos topológicos e suas aplicações em diversas áreas da matemática e da ciência.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A pesquisa foi de natureza teórica. Inicialmente, realizamos um levantamento bibliográfico, selecionando livros e artigos essenciais para estabelecer uma base sólida no entendimento dos conceitos fundamentais de Topologia Geral e Grupos Topológicos. Como ponto de partida, nos baseamos principalmente nos livros "Topology" do James Munkres e "Topology: point-set and geometric"do Paul Shick, para orientar nosso estudo sobre Topologia Geral.

Após a fase inicial de levantamento bibliográfico, prosseguimos com o estudo aprofundado da Topologia Geral, abrangendo desde a compreensão das definições básicas de topologia até a exploração de tópicos mais avançados, como espaços topológicos localmente compactos. Posteriormente, aproveitamos as ferramentas adquiridas e os resultados assimilados durante o estudo de Topologia Geral para iniciar a exploração dos Grupos Topológicos.

Nesta etapa, nossa principal referência foi a apostila "Introduction to topological groups"do Dikran Dikranjan, que ofereceu uma abordagem sólida para compreender desde a definição de grupos topológicos até questões relacionadas a grupos quocientes topológicos e axiomas de separação.

Ao longo desse processo, foi necessário buscar referências mais específicas e especializadas para esclarecer conceitos complexos e explorar determinados tópicos em maior detalhe. O artigo "Exploratory results on finite topological groups" dos pesquisadores indianos Arumugam Kumar e Paulraj Gnanachandra foi fundamental para a obtenção de exemplos sobre grupos topológicos. O livro "Grupos de Lie" do professor Luiz San Martin foi essencial para compreensão do resultado mais importante desse trabalho, que determina um critério para que um grupo munido de uma topologia seja um grupo topológico.

Essa abordagem metodológica nos permitiu obter uma compreensão abrangente e profunda dessas áreas de estudo, contribuindo para uma pesquisa fundamentada e significativa.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Definição 1. Sejam $(G,\cdot)$ um grupo e τ_G uma topologia em G. O trio $(G,\cdot,\tau_G)$ é dito um *grupo topológico* se as funções

$$\begin{array}{rl} i: & G \longrightarrow G \\ & x \longmapsto x^{-1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \cdot: & G\times G \longrightarrow G \\ & (x,y) \longmapsto x\cdot y \end{array}$$

chamadas de *inversão* e *operação* de G respectivamente, são contínuas quando G $\times$ G é munido da topologia produto.

O teorema a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para que um homomorfismo de grupos seja contínuo.

Teorema 2. Sejam $(G,\cdot,\tau_G)$ e $(H,\circ,\tau_H)$ grupos topológicos e f : G $\to$ H um homomorfismo de grupos. Então, f é contínua se, e somente se, f é contínua em $1_G \in$ G.

Apresentamos agora a definição de Filtro. Filtros são úteis na Topologia pois auxiliam na definição de noções de convergência e continuidade, fundamentais para o estudo de funções e espaço topológicos.

Definição 3. Seja X um conjunto. Uma família não-vazia F de subconjuntos de X é chamada de filtro se satisfaz as seguintes condições:

i. $\emptyset \notin F$.

ii. Se A, B $\in F$ então A $\cap$ B $\in F$.

iii. Se A $\in F$ e A $\subset$ B, então B $\in F$.

Apresentamos agora a definição de filtro viável. Ela será essencial mais a frente, quando formos determinar algumas condições para que um grupo munido de uma topologia se torne um grupo topológico.

Definição 4. Sejam $(G,\cdot)$ um grupo e $\mathscr{F}$ um filtro de G. Diremos que $\mathscr{F}$ é *viável* quando

i. Para cada U $\in \mathscr{F}$, existe V $\in \mathscr{F}$ tal que V $\cdot$ V $\subset$ U.

ii. Para cada U $\in \mathscr{F}$, existe V $\in \mathscr{F}$ tal que V$^{-1} \subset$ U.

iii. Para cada U $\in \mathscr{F}$, existe V $\in \mathscr{F}$ tal que V $\cdot$ V$^{-1} \subset$ U.

iv. Para cada U $\in \mathscr{F}$ e a $\in G$, tem-se que $aUa^{-1} \in \mathscr{F}$.

O próximo teorema é o resultado mais importante deste trabalho. É através dele que, dado um grupo $(G,\cdot)$, podemos determinar uma única topologia τ em G de forma que $(G,\cdot,\tau)$ seja um grupo topológico, por meio de filtros.

Teorema 5. Sejam $(G,\cdot)$ um grupo e $\mathscr{V}$ um filtro viável de G. Então, existe uma única topologia τ em G que torna $(G,\cdot,\tau)$ um grupo topológico e que faz $\mathscr{V}$ coincidir com $\mathscr{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia.

Um subgrupo topológico é um subgrupo de um grupo topológico que relativo à topologia de subespaço é também um grupo topológico.

Definição 6. Sejam $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Chamamos de *subgrupo topológico* o trio $(H,\cdot,\tau_H)$, onde τ_H é a topologia subespaço.

Reunimos uma série de proposições sobre subgrupos topológicos que serão apresentadas sob um único teorema.

Teorema 7. Sejam $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então

i. H é aberto se, e somente se, possui interior não-vazio.

ii. Se H é aberto, então H é fechado.

iii. Se H é fechado e $\mid G : H \mid < \infty$ então H é aberto.

Teorema 8. Sejam $(G,\cdot,\tau_G)$ um grupo topológico, $H \subset G$ e $\mathscr{V}(1_G)$, o filtro de todas as vizinhanças de 1_G nessa topologia. Então

i. $\overline{H} = \bigcap_{U \in \mathscr{V}(1_G)} (UH) = \bigcap_{U \in \mathscr{V}(1_G)} (HU) = \bigcap_{U,V \in \mathscr{V}(1_G)} (UHV)$.

ii. Se H é um subgrupo de G então $\overline{H}$ também é um subgrupo G. Se H é normal então $\overline{H}$ também é normal.

iii. $N = \overline{\{1\}}$ é um subgrupo fechado e normal.

Um grupo quociente topológico é um grupo quociente que, munido da topologia quociente, é um grupo topológico.

Definição 9. Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Chamamos de *grupo quociente topológico* o trio $\left(G/_H, \sigma, \tau_{G/H} \right)$, onde $\tau_{G/H}$ é a topologia quociente.

Teorema 10. Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ um grupo topológico e H um subgrupo normal de G. Então o quociente $G/_H$ é discreto se, e somente se, H é aberto.

Teorema 11. Sejam $(G, \cdot, \tau_G)$ e $(H, \times, \tau_H)$ grupos topológicos. Sejam $f : G \longrightarrow H$ um homomorfismo contínuo e sobrejetivo e $q : G \longrightarrow G/_f$ o homomorfismo canônico. Então, existe um único isomorfismo contínuo $f_1 : G/_f \longrightarrow H$ tal que $f = f_1 \circ q$. Além disso, f_1 é um homeomorfismo se, e somente se, f é uma aplicação aberta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

A pesquisa realizada na iniciação científica sobre grupos topológicos proporcionou uma visão aprofundada e fascinante do mundo da topologia e da álgebra, destacando a interação complexa entre esses dois campos da matemática para o bolsista.

1 REFERÊNCIAS

DIKRANJAN, D. Introduction to topological groups. preparation, `http://users.dimi.uniud.it/~dikran.dikranjan/ITG.pdf`, 2013.

KUMAR, A. M; GNANACHANDRA, P. Exploratory results on finite topological groups. JP Journal of Geometry and Topology, v. 24, n. 1-2, p. 1-15, 2020

MONTGOMERY, D. What is a topological group?. The American Mathematical Monthly, v. 52, n. 6, p. 302-307, 1945.

MUNKRES, J. R. Topology. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

SAN MARTIN, L. AB. Grupos de lie. Editora Unicamp, 2016.

SHICK, Paul L. Topology: point-set and geometric. John Wiley Sons, 2011.