UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº 17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXVII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2023

IDENTIFICANDO ÁLGEBRA DE QUATÉRNIOS DE DIVISÃO EM ANÉIS DE GRUPO SOBRE O CORPO DOS RACIONAIS.

Késia Tayla Conceição de Oliveira [1] **e Maurício de Araújo Ferreira** [2]

[1]Bolsista PIBIC/FAPESB, Graduanda em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: kesiatayla56@gmail.com

[2]Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: maferreira@uefs.br

PALAVRAS CHAVE: Anéis de grupo, grupo dos quatérnios, álgebra de quatérnios.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho teve como objetivo geral investigar a existência de anéis de quatérnios de divisão sobre o corpo dos números racionais como subanéis de anéis de grupo. Fez-se necessário pesquisas na área de Álgebra não comutativa, propriedades algébricas dos anéis de grupo e ideais de aumento, propriedades de grupos, em particular do grupo dos quatérnios $\mathbb{R}K_8$, propriedades das álgebras de quatérnios sobres o corpo dos reais e racionais, identificação do anel de quatérnios no anel de grupo $\mathbb{R}K_8$, investigação de casos particulares de anéis de quatérnios sobre os racionais no anel de grupo $\mathbb{Q}K_8$.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A pesquisa é de natureza teórica. Os resultados foram obtidos a partir do entendimento das propriedades das estruturas envolvidas e da observação de casos particulares.

Como a pesquisa foi de natureza teórica, não exigiu muitos recursos técnicos para que fosse desenvolvida. Foi utilizado o laboratório de informática LABMAT do DEXA e os principais periódicos foram acessados pela internet. As principais referências utilizadas nessa pesquisa foram (MILIE e SEHGAL, 2002), (SILVA, 2021) e (LOBO, 2022).

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Nesta seção, iremos apresentar os principais resultados estudados durante a vigência da bolsa de iniciação científica. Primeiramente, apresentaremos os conceitos e alguns conceitos básicos sobre a estrutura de anéis de grupos.

Definição 1 Seja G um grupo finito e R um anel comutativo com unidade, dessa forma obteremos uma estrutura de anel de grupo como o conjunto das combinações lineares

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g,$$

onde $a_g \in R$ e $g \in G$ e são definidas as operações entre dois elementos :
i) Soma:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g.$$

ii) Produto:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) = \sum_{g,h \in G} (a_g b_h) gh.$$

iii) Produto por escalar:

$$\gamma \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} (\gamma a_g) g, \forall \gamma \in R.$$

RG forma uma estrutura de anel e se R for um corpo, então RG é um espaço vetorial. Apresentaremos a seguir alguns exemplos de Anéis de Grupo.

1. Sejam $\mathbb{S}_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ o grupo definido pelas transformações que preservam o triângulo, com a operação de composição e $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais. O anel de grupo do grupo $\mathbb{S}_3$ sobre o corpo dos números reais é definido por

   $$\mathbb{R}\mathbb{S}_3 = \left\{ \sum_{g \in S_3} a_g g \mid a_g \in \mathbb{R}, g \in \mathbb{S}_3 \right\}.$$

   Para qualque, $\alpha \in \mathbb{R}\mathbb{S}_3$, existem $a_g, \in \mathbb{R}$, tais que

   $$\alpha = a_e e + a_\sigma \sigma + a_{\sigma^2} \sigma^2 + a_\tau \tau + a_{\sigma\tau} \sigma\tau + a_{\sigma^2\tau} \sigma^2\tau.$$

2. Sejam $\mathbb{K}_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ o grupo dos quatérnios, que é um grupo não abeliano de ordem 8. O anel de grupo do grupo $\mathbb{K}_8$ sobre o corpo dos números complexos, que é definido por

   $$\mathbb{C}\mathbb{K}_8 = \left\{ \sum_{g \in K_8} a_g g \mid a_g \in \mathbb{C}, g \in \mathbb{K}_8 \right\}.$$

   Para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}_8$, existem $c_g, \in \mathbb{R}$, tais que

   $$\alpha = c_e e + c_a a + c_{a^2} a^2 + c_{a^3} a^3 + c_b b + c_{ab} ab + c_{a^2b} a^2 b + c_{a^3} a^3 b.$$

Agora, apresentaremos a noção dos quatérnios generalizados, que é um dos temas centrais do nosso trabalho.

Definição 2: Seja K um corpo com característica diferente de 2 e sejam $u, v \in K$ com $u, v \neq 0$. Definimos $(u, v)_K$ o anel dos quatérnios generalizados:

$$(u, v)_K = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in K\}.$$

Dados dois elementos $\alpha = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $\beta = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$, definimos a soma:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)\\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.\end{aligned}$$

O produto das unidades básica $1, i, j, k$ é definida a partir da seguinte tábua de multiplicativa:

$$i^2 = u, j^2 = v, ij = -ji = k;$$

e a partir dela podemos encontrar as outras identidades. A multiplicação é definida de maneira distribuitiva.

O conjunto $(u, v)_K$, forma uma estrutura de anel e de espaço vetorial de dimensão 4 sobre K. Os quatérnios generalizados da definição 2 são uma generalização dos quatérnios de Hamilton, descoberta por Hamilton em 1943.

Definição 3: Definimos o anel dos quatérnios de Hamilton $(-1, -1)_R$, também escrito como $\mathbb{H}$, como o conjunto formados por elementos

$$\alpha = a + bi + cj + dk,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e i, j, k , onde

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

e a partir dela, podemos encontrar outras identidades.

Os quatérnios generalizados nem sempre terão estrutura de anel de divisão, isso depende dos valores assumidos por u e v. Um resultado cuja prova pode ser encontrado em (SILVA, 2022) nos diz que quando $(u, v)_K$ não é um anel de divisão, ele é isomorfo ao anel de matrizes.

Lema 4: O anel dos quatérnios $(1, v)_K$ é isomorfo ao anel de matrizes $M_2(\mathbb{K})$.

Um resultado encontrado em (MILIE e SEHGAL, 2002), nos diz que $(-1, -1)_R$ é subanel de $\mathbb{R}\mathbb{K}_8$. O objetivo do nosso trabalho é generalizar este resultado.

Teorema 5: $(1, v)_{\mathbb{Q}}$ é um subanel de $\mathbb{Q}\mathbb{S}_3$.

Esboço de demonstração: Considere uma aplicação $\phi : (1, v)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}\mathbb{S}_3$ que é definida nos elementos da base da seguinte forma:

$$\phi : (1, v)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}\mathbb{S}_3;$$

$$\phi(1) \longmapsto \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}\sigma - \frac{1}{3}\sigma^2;$$

$$\phi(i) \longmapsto -\frac{1}{3}\sigma + \frac{1}{3}\sigma^2 - \frac{2}{3}\sigma\tau + \frac{2}{3}\sigma^2\tau;$$
$$\phi(j) \longmapsto \frac{(v-1)}{3}\sigma + \frac{(v+1)}{3}\tau + \frac{(1-v)}{3}\sigma^2 - \frac{1}{3}\sigma\tau - \frac{v}{3}\sigma^2\tau;$$
$$\phi(k) \longmapsto -\frac{(-v-1)}{3}\sigma + \frac{(-v+1)}{3}\tau + \frac{(1+v)}{3}\sigma^2 - \frac{1}{3}\sigma\tau + \frac{v}{3}\sigma^2\tau.$$

Essa aplicação é um monomorfismo de espaços vetoriais e um monomorfismo de anéis, pois preserva as operações do produto.

Teorema 6: $(1, v)_{\mathbb{C}}$ é um subanel de $\mathbb{C}\mathbb{K}_8$.

Esboço de demonstração: Considere uma aplicação $\rho : (1, v)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{K}_8$ que é definida nos elementos da base da seguinte forma:

$$\rho : (1, v)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{K}_8;$$
$$\rho(1) \longmapsto \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}a^2;$$
$$\rho(i) \longmapsto -\frac{i}{2}b + \frac{i}{2}a^2b;$$
$$\rho(j) \longmapsto \frac{-i(v+1)}{4}a + \frac{i(v+1)}{4}a^3 - \frac{(v-1)}{4}ab + \frac{(v-1)}{4}a^3b;$$
$$\rho(k) \longmapsto -\frac{i(v-1)}{4}a - \frac{i(v-1)}{4}a^3 + \frac{(v+1)}{4}ab - \frac{(v+1)}{4}a^3b.$$

Essa aplicação é um monomorfismo de espaços vetoriais e um monomorfismo de anéis, pois preserva as operações do produto.

Os resultados obtidos se mostraram promissores e foram para o caso em que o anel dos quatérnios sobre os racionais Q, é isomorfo ao anel das matrizes, pretendemos estender este resultado para o caso em que o anel dos quatérnios é de divisão, um ponto de partida importante é o anel $(-1, p)_Q$, para p primo e $p \equiv 3 \bmod 4$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa permitiu o estudo e a compreensão de tópicos da Álgebra não comutativa, que não teríamos acesso apenas pelas disciplinas obrigatórias do curso de Licenciatura em Matemática, são inúmeras as contribuições e benefícios do presente trabalho para uma formação acadêmica mais completa e que será um grande diferencial na minha formação, contribuindo também para uma futura formação continuada.

REFERÊNCIAS

1. MILIES, C. P.; SEHGAL, S. K., **An introduction to group rings. Algebras and applications**. Volume 1. Springer, 2002.

2. SILVA, L. C., **Extensão de escalares em álgebra de quatérnios**. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2021.

3. LOBO, M. M., **Relacionando o anel dos quatérnios de Hamilton com anéis de grupo**. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2022.