



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA**

Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76  
Recredenciamento pelo Decreto nº 17.228 de 25/11/2016



**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

**XXVII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS**  
**SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2023**

**TEOREMA DE PERMUTABILIDADE DA  
TRANSFORMAÇÃO DE BÄCKLUND em  $\mathbb{R}^3$**

**MATHEUS SILVA XAVIER<sup>1</sup> e CLAUDIANO GOULART<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Bolsista PIBIC/FAPESB, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: matheussilvaxavier@yahoo.com

<sup>2</sup>Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: cgoulart@uefs.br

**PALAVRAS CHAVE:** Superfícies; Permutabilidade; Bäcklund.

## **INTRODUÇÃO**

O trabalho tem como objetivo realizar um estudo detalhado da demonstração do Teorema de Permutabilidade da Transformação de Bäcklund no espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Este teorema afirma que, partindo de uma superfície de curvatura constante negativa imersa em  $\mathbb{R}^3$  e de duas superfícies obtidas por transformação de Bäcklund da primeira, é possível construir, de maneira algébrica, uma quarta superfície de curvatura constante negativa que é a transformação de Bäcklund destas duas últimas.

Para atingir este objetivo, foi necessário realizar um estudo das formas diferenciais em  $\mathbb{R}^2$ , que serviram como base para a compreensão do Método do Triedro Móvel. Este método consiste na construção de um triedro móvel em cada ponto da superfície para compreender suas propriedades locais. Através dessa abordagem, exploramos os conceitos da Teoria Local das Superfícies necessários para a construção dos conceitos de Congruência pseudo-esférica, o Teorema de Bäcklund e o Teorema de Permutabilidade de Bäcklund.

Por fim, aplicamos os conceitos estudados para encontrar as superfícies utilizadas na construção de um exemplo para o Teorema de Permutabilidade e gerar imagens através do software Geogebra.

## **MATERIAL E MÉTODOS**

Para a realização deste trabalho, os materiais utilizados foram livros adquiridos pelo bolsista durante o período da vigência da bolsa e um computador para o uso dos softwares matemáticos. A metodologia utilizada foi de revisão bibliográfica, tendo em vista que esta é uma pesquisa da área de Matemática. Primeiramente, eram feitos estudos individuais sobre tópicos selecionados pelo orientador. Em seguida, o assunto estudado era discutido através de reuniões semanais com o orientador.

As principais referências utilizadas nesse estudo foram Tenenblat [1] e [2]. Inicialmente, utilizamos o livro [1] para realizarmos o estudo sobre formas diferenciais, equações de es-

trutura em  $\mathbb{R}^2$ , Congruência pseudo-esférica e o Teorema de Bäcklund. Posteriormente, utilizamos o livro [2] para realizar o estudo da demonstração da permutabilidade da transformação de Bäcklund. Então finalizamos com a visualização das superfícies associadas por Transformação de Bäcklund com o uso do software matemático Geogebra.

## RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO

Nessa seção vamos apresentar os principais resultados estudados durante a vigência da bolsa de iniciação científica. Maiores detalhes podem ser encontrados em Tenenblat [1] e [2]. Iniciaremos introduzindo o conceito de *congruência pseudoesférica* que será necessário para construir os conceitos que serão utilizados no enunciado do Teorema de Permutabilidade de Bäcklund.

**Definição.** Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\bar{X} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  superfícies sem auto-interseção e sejam  $S = X(U)$  e  $\bar{S} = \bar{X}(\bar{U})$ . Uma *congruência pseudoesférica* entre  $S$  e  $\bar{S}$  é uma aplicação bijetora  $\ell : S \longrightarrow \bar{S}$  tal que  $\ell \circ X$  e  $\ell^{-1} \circ \bar{X}$  são diferenciáveis e são satisfeitas as seguintes condições:

- a) para todo  $p \in S$ ; os pontos  $p$  e  $\bar{p} = \ell(p)$  determinam uma tangente a  $S$  e  $\bar{S}$ ;
- b) a distância de  $p$  a  $\bar{p}$  é igual a uma constante  $r$  que independe de  $p$ ;
- c) o ângulo entre as retas normais de  $S$  e  $\bar{S}$  em  $p$  e  $\bar{p}$  é igual a uma constante  $\theta \neq 0$  que independe de  $p$ .

O teorema de Bäcklund mostra que congruências pseudo-esféricas só podem ocorrer entre superfícies que possuem a mesma Curvatura Gaussiana constante negativa. Um exemplo de superfície com esta propriedade será mostrado no Exemplo 1. O fato da pseudoesfera possuir Curvatura Gaussiana constante negativa justifica a denominação da congruência pseudo-esférica.

**Teorema de Bäcklund.** Sejam  $S$  e  $\bar{S}$  duas superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Se  $\ell : S \longrightarrow \bar{S}$  é uma congruência pseudo-esférica tal que a distância entre pontos correspondentes  $p, \bar{p}$  é uma constante  $r > 0$  e o ângulo entre as normais em  $p$  e  $\bar{p}$  é igual à constante  $\theta$ , com  $0 < \theta < \pi$ . Então, ambas as superfícies têm curvatura Gaussiana constante negativa  $K$ , onde

$$K = -\frac{\text{sen}^2\theta}{r^2}.$$

Através deste teorema podemos ver que existe uma relação de dependência entre o ângulo  $\theta$  e à distância entre os pontos  $p$  e  $\ell(p)$ . Além disso, a próxima proposição mostra que é possível criar novas superfícies com curvatura gaussiana constante  $K < 0$ , com base em uma superfície que já possui essa mesma curvatura escolhendo um ângulo  $\theta$ .

**Proposição.** Seja  $X$  uma superfície de curvatura constante  $K < 0$ . Sejam  $r > 0$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$  números reais satisfazendo a equação do Teorema de Bäcklund e  $\psi(u, v)$  uma função que satisfaz a equação diferencial

$$\psi_{uu} - \psi_{vv} = -K \text{sen}\psi.$$

Então, a superfície

$$X' = X + r \left( \frac{\cos \frac{\psi'}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}} X_u + \frac{\sin \frac{\psi'}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} X_v \right)$$

é uma nova superfície de curvatura constante  $K$  em  $\mathbb{R}^3$ .

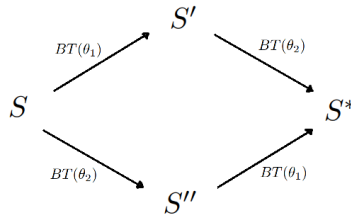
O método para encontrar a equação da superfície  $X'$  apresentada na proposição anterior se baseia na *transformação de Bäcklund*, que é uma técnica utilizada para gerar novas soluções de equações diferenciais parciais não lineares a partir de soluções conhecidas. Iremos utilizar a notação  $BT(\theta)$  para nos referir à aplicação da transformação de Bäcklund em um ângulo  $\theta$  escolhido.

A seguir, veremos que partindo de uma superfície de curvatura constante negativa em  $\mathbb{R}^3$  e de duas superfícies, obtidas por transformação de Bäcklund da primeira, pode-se construir, algebricamente, uma quarta superfície de curvatura constante negativa que é transformação de Bäcklund destas duas últimas.

**Teorema da Permutabilidade de Bäcklund.** Sejam  $S$ ,  $S'$  e  $S''$  superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Suponha que existam congruências pseudoesféricas  $\ell_1 : S \rightarrow S'$  e  $\ell_2 : S \rightarrow S''$  com constantes  $r_1, \theta_1$  e  $r_2, \theta_2$ , respectivamente,  $\theta_1 \neq \theta_2$ . Então existe uma superfície  $S^*$  em  $\mathbb{R}^3$  e congruências pseudoesféricas  $\ell_2^* : S' \rightarrow S^*$ ,  $\ell_1^* : S'' \rightarrow S^*$  com constantes  $r_2, \theta_2$  e  $r_1, \theta_1$ , respectivamente, tais que

$$\ell_2^* \circ \ell_1 = \ell_1^* \circ \ell_2.$$

O esquema abaixo ilustra o funcionamento do Teorema de Permutabilidade.



Agora, veremos um exemplo aplicando o Teorema de Permutabilidade à superfícies.

**Exemplo 1.** A pseudoesfera apresentada na Figura 1 é uma superfície de  $\mathbb{R}^3$  com Curvatura Gaussiana constante  $K = -1$  descrita por

$$X(u, v) = (\operatorname{sech}(u)\cos(v), \operatorname{sech}(u)\sin v, \tanh(u) - u), \quad u \neq 0.$$

A superfície de curvatura constante negativa obtida da pseudoesfera pela transformação de Bäcklund  $BT(\frac{\pi}{2})$  mostrada na Figura 2 é dada por

$$X' = X + \cos \frac{\psi'}{2} \coth(u) X_u + \sin \frac{\psi'}{2} \cosh(u) X_v$$

onde

$$\cos \frac{\psi'}{2} = \frac{(-v+c)^2 - \cosh^2(u)}{(-v+c)^2 + \cosh^2(u)} \quad \sin \frac{\psi'}{2} = \frac{2\cosh(u)(-v+c)}{(-v+c)^2 + \cosh^2(u)}$$

Similarmente, podemos obter uma outra superfície associada a  $X$  por  $BT(\frac{\pi}{4})$ , mostrada na Figura 3, dada por

$$X'' = X + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\psi''}{2} \coth(u) X_u + \operatorname{sen} \frac{\psi''}{2} \cosh(u) X_v \right)$$

onde

$$\cos \frac{\psi''}{2} = \frac{(1 + e^{\sqrt{2}u-v+u})^2 - (\sqrt{2} + 1)^2 (e^{\sqrt{2}u-v} - e^u)^2}{(1 + e^{\sqrt{2}u-v+u})^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 (e^{\sqrt{2}u-v} - e^u)^2} \quad \operatorname{sen} \frac{\psi''}{2} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)(e^{\sqrt{2}u-v} - e^u)(1 + e^{\sqrt{2}u-v+u})}{(1 + e^{\sqrt{2}u-v+u})^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 (e^{\sqrt{2}u-v} - e^u)^2}$$

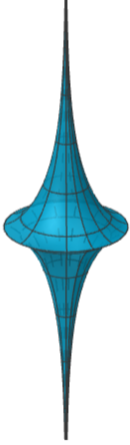


Figura 1: Pseudoesfera

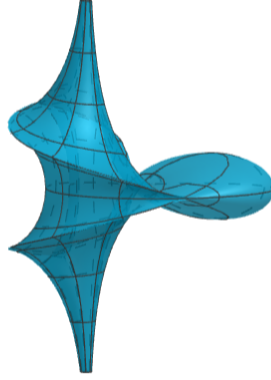


Figura 2: Superfície de Kuen

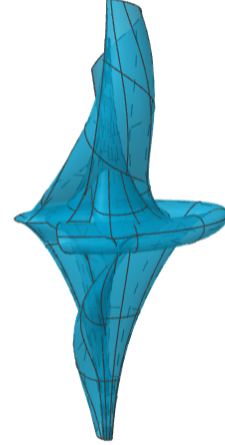


Figura 3: Superfície obtida da pseudoesfera por  $BT(\pi/4)$

Nós concluímos que a quarta superfície  $X^*$ , que está associada a  $X'$  por  $BT(\frac{\pi}{4})$  e a  $X''$  por  $BT(\frac{\pi}{2})$ , é dada por

$$X^* = X' + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -B_{11} (\cos \frac{\psi'}{2} \coth(u) X_u + \operatorname{sen} \frac{\psi'}{2} \cosh(u) X_v) + B_{12} e_3 \right)$$

onde  $e_3$  é o vetor normal a  $X$  e

$$B_{11} = \frac{\sqrt{2} \cos \left( \frac{\psi'' - \psi'}{2} \right) - 1}{\cos \left( \frac{\psi'' - \psi'}{2} \right) - \sqrt{2}} \quad B_{12} = \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\psi'' - \psi'}{2} \right)}{\sqrt{2} - \cos \left( \frac{\psi'' - \psi'}{2} \right)}$$

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho de Iniciação Científica permitiu ao bolsista aprofundar seus estudos na área de Geometria Diferencial. Através deste projeto, foi possível explorar conteúdos que não são abordados nas disciplinas obrigatórias do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS. Esse aprofundamento enriqueceu a produção do meu Trabalho de Conclusão de Curso e teve um impacto positivo em minha formação, contribuindo para um futuro mestrado em Matemática.

## REFERÊNCIAS

1. Tenenblat, K. Introdução à Geometria Diferencial. 2<sup>a</sup> ed. revisada. São Paulo: Blucher, 2008.
2. Tenenblat, K., *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, Addison Wesley Longman, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 93, 1998;