UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Autorizada pelo Decreto Federal n°77.496 de 27/04/76

Recredenciamento pelo Decreto n°17.228 de 25/11/2016

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO-
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXVII SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2023

FORMULAÇÃO E ANÁLISE DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MISTO-HÍBRIDO ESTABILIZADO DO PROBLEMA DE ELASTICIDADE INCOMPREENSÍVEL

Marcela Jesus Silva[1] ; **Geraldo José Belmonte dos Santos**[2]

PALAVRAS-CHAVE: Elasticidade Incompreensível; Elementos Finitos; Formulação Mista-Híbrida.

INTRODUÇÃO

A teoria da elasticidade linear busca estudar as tensões, deformações e deslocamentos de um corpo, considerado elástico, causadas pela ação de forças externas. Adicionalmente, o comportamento pode ser compressível ou (quase-)incompressível, sendo o último caracterizado pelo estudo de materiais que não sofrem variação significativa de volume (comportamento isocórico) sob carga. Para solução aproximada desses problemas é largamente utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF), o qual é usado amplamente em problemas de análise de estruturas, incluindo o comportamento mecânico de edifícios, pontes e etc, determinando como eles respondem a diferentes cargas, como pressões, forças e temperaturas. Dado o carregamento, busca-se verificar pontos de concentração de tensão e permitir a otimização de peças antes da fabricação, garantindo que as estruturas sejam seguras, duráveis e eficientes.

Quando um material é incompressível sua restrição de volume impede que ele se deforme da mesma forma que um material compressível, o que introduz vínculos internos que dificultam a solução numérica. A formulação primal do MEF baseada no deslocamento, aplicada ao problema da elasticidade isotrópica linear, geralmente é instável e não convergente para materiais incompressíveis ou quase-incompressíveis, ocasionando um fenômeno chamado de travamento isocórico. Para superar o travamento, estratégias como o uso de formulações mistas, híbridas e com termos de resíduo de estabilização, são utilizadas. No caso misto, além da variável primal (deslocamento), introduz-se a variável dual (tensão e/ou tensão hidrostática) com campos de interpolação compatíveis. A introdução de variáveis adicionais, além das variáveis primárias, permite representar a incompressibilidade (divergência nula dos deslocamentos) superando o problemas de travamento, pois não trata apenas com as variáveis de deslocamento. A principal vantagem da formulação dupla mista-híbrida estabilizada é que ela pode fornecer soluções mais precisas, sem o problema de travamento.

[1]1. Bolsista FAPESB, Graduanda em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: marcelajesussilva20@gmail.com

[2]Orientador, Departamento de Tecnologia, Universidade Estadual de Feira de Santana,

O presente trabalho tem o objetivo de desenvolver, analisar a formulação mista-híbrida do método de elementos finitos, estabilizada com a técnica de resíduos consistentes, ficando a análise de convergência e erro como continuidade do trabalho, a ser incorporada em publicações futuras. A seguir, será então apresentado o problema modelo de elasticidade isotrópica linear, a formulação do problema de elasticidade incompreensível e a análise do MEF gerado.

PROBLEMA MODELO - FORMA FORTE E FORMA FRACA PRIMAL

Seja Ω um domínio aberto delimitado em $R^{n_{sd}}$, $n_{sd} = 2, 3$, ocupado por um meio deformável, com limite contínuo de Lipschitz[3] $\Gamma = \partial\Omega$ e sujeito à força externa do corpo $f : \Omega \longrightarrow R^{n_{sd}}$. O problema de elasticidade isotrópica é apresentado da seguinte forma.

Problema: Encontre o vetor de deslocamentos $u(x) : \Omega \longrightarrow R^{n_{sd}}$ e o tensor de tensão de Cauchy[4] $\sigma(x) : \Omega \longrightarrow R^{n_{sd} \times n_{sd}}, \forall x \in \Omega$, tal que

$$div(\sigma) \ + \ f = \ 0, \quad em\ \Omega \qquad (Equa\text{ç}\tilde{a}o\ de\ Equil\acute{\imath}brio) \quad (1)$$

$$D\sigma \ = \ \epsilon(u) \quad em\ \Omega \qquad (Equa\text{ç}\tilde{a}o\ constitutiva) \quad (2)$$

e as condições de contorno são[5]

$$u(x) \ = \bar{g_D} \quad \forall x \in \Gamma_D, \qquad \text{(Dirichlet b. c.)}$$

$$(\sigma \cdot n)(x) \ = \ \bar{g_N} \quad \forall x \in \Gamma_N, \qquad \text{(Neumann b. c.)}$$

onde $\epsilon(u)$ é o tensor de deformação e D é o tensor constitutivo isotrópico de quarta ordem, também chamado de tensor de flexibilidade.

Formulação Dupla Mista-Híbrida Estabilizada

A formulação mista-híbrida estabilizada, como já foi mencionada, é uma técnica avançada de formulação numérica no método dos elementos finitos que envolve a introdução de variáveis secundárias (tensão no domínio e deslocamento no contorno dos elementos). Assim, seja o espaço dos campos de deslocamento $v : \Omega \longrightarrow R^{n_{sd}}$. A formulação primária fraca clássica do problema da elasticidade, dado $f \in V'$[6] e $\bar{g_D} = 0$, é definida como segue.

Seja a força de corpo $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^{n_{sd}}$ e a condição de contorno cinemática $\bar{\mathbf{g}}_D = 0$ on Γ_D. Para a conveniente escolha de parâmetros δ_1, δ_2 nd β a formulação dual mista-híbrida estabilizada (FDMH-MEF) é dada como a seguir:

---

[3]Um critério de suavidade mais forte que a condição de continuidade uniforme.

[4]Usado para a análise de tensões de corpos matérias submetidos a pequenas deformações.

[5]Elas são restrições ou informações específicas que são aplicadas a um problema.

[6]$V = \{v \in [\mathbf{H}^1(\Omega)]^{n_{sd}}; v = 0$ sobre Γ_D

Problema FDMH-MEF: Encontrar $\{\sigma, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}\} \in \mathcal{X}$ para todo $\{\tau, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}\} \in \mathcal{X}$, tal que

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_h} \Big\{ (D\sigma, \tau)_{\mathcal{K}} + (\mathbf{u}, \operatorname{div}\tau)_{\mathcal{K}} - (\hat{\mathbf{u}}, \tau\cdot\mathbf{n})_{\partial\mathcal{K}} & \quad + \\
\delta_1\,(|D|(\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f}), \operatorname{div}\tau)_{\mathcal{K}} & \quad + \\
(\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathcal{K}} & \quad + \\
\delta_2\,(\sigma - C\nabla^S\mathbf{u}, D\tau - \nabla^S\mathbf{v})_{\mathcal{K}} & \quad - \qquad\qquad (3) \\
\beta\,(|C|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}),\ \mathbf{v})_{\partial\mathcal{K}} \Big\} & \quad = \quad 0 \\
\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_h} \Big\{ \beta\,(|C|(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}), \hat{\mathbf{v}})_{\partial\mathcal{K}} & \quad - \\
(\sigma\cdot\mathbf{n}, \hat{\mathbf{v}})_{\partial\mathcal{K}} + (\bar{\mathbf{g}}_{_N}, \hat{\mathbf{v}})_{\partial\mathcal{K}\cap\Gamma_N} \Big\} & \quad = \quad 0, \qquad\qquad (4)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário sobre $\partial\mathcal{K}$.

Os parâmetros de estabilização δ_1, δ_2 and β podem ser, em geral, dependentes do tamanho da malha h e são escolhidos para dar as melhores propriedades de estabilidade e exatidão de resultados para a formulação. Os termos em δ_1 na formulação acima representam a adição do resíduo quadrado da equação de equilíbrio, os termos δ_2 são devido a eqquação constitutiva. Ambos os termos contribuem para melhorar a estabilidade dos campos de tensão e deslocamento nos espaços $H(\operatorname{div}, \mathcal{T}_h)$ e $[H^1(\mathcal{T}_h)]^{n_{sd}}$, respectivamente. O termo de β melhora a estabilidade do multiplicador de Lagrange no contorno dos elementos. Os últimos termos na equação são a fracamente imposição de continuidade do vetor tensão na estrutura de faces dos elementos finitos $\mathcal{E}_h$, incluindo os conternos externos Γ_N. Nesse caso, as condições de contorno sobre Γ_N é fracamente imposta. Os parâmetros $|D|$ e $|C|$ são introduzidas na equação para dimensionalizar adequadamente os termos adicionados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir dos resultados anteriores expostos, temos a Formulação Dual Mista-Híbrida Estabilizada - Aproximação de Elementos Finito (FDMH - MEF) que consiste na Formulação Dual Mista-Híbrida Estabilizada resolvida através da aproximação de Elementos Finito. No MEF, o domínio do problema é discretizado em elementos finitos, onde as variáveis desconhecidas são aproximadas em uma malha de elementos finitos e as equações resultantes são resolvidas numericamente para obter soluções aproximadas para o problema físico. O FDMH- MEF é estável e converge na ordem ótima com propriedades importantes de solucionador eficiente e possibilidade de lidar facilmente com a adaptabilidade hp, considerando uma formulação equivalente à elasticidade isotrópica linear, incluindo problemas em meio incompressível e soluções não suaves.

Por uma questão de simplicidade, assumimos que domínio $\Omega \subset R^2$ é poligonal. Seja $\{T_h\}$ uma família de partição de forma regular do domínio Ω em elementos K; $h := max_{K\in T_h}$ e $h_K := diam(K)$. Seja ε_h a união de todas as faces (arestas) da partição T_h e ε_h^i a união de todas as faces internas (arestas). Definindo os espaços de elementos finitos tais que

$$\chi_h \;=\; W_h \;\times\; V_h \times\; M_h, \tag{5}$$

com

$$W_h = \{\tau_h \in \mathbf{H}(div, T_h);\; \tau_{ij} \in\; D_k(K),\; \forall K\; \in T_h,\; i,j \;=\; 1...2\}, \tag{6}$$

$$V_h = \{v_h \in \mathbf{H}^1(T_h);\; v_i\; \in D_l(K),\; \forall K \in T_h,\; i \;=\; 1...2\}, \tag{7}$$

$$M_h = \{\hat{v}_h \in \mathbf{H}_D^{\frac{1}{2}}(\varepsilon_h);\; \hat{v}_i\; \in P_m(e),\; \forall e \in \varepsilon_h,\; i \;=\; 1...2\}, \tag{8}$$

Onde $D_k(K) = P_k(K)$, o espaço de funções polinomiais de grau no máximo k em ambas as variáveis, ou $D_k(K) = Q_k(K)$, o espaço de funções polinomiais de grau no máximo k em casa variável, $P_m(e)$ é o espaço de funções polinomiais de grau no máximo m. Define-se nos espaços de dimensão finita a formulação híbrida dupla estabilizada para problemas de elasticidade é formulada como:

FDMH- MEF: Seja $f \in [L^2(\Omega)]^{n_{sd}}$ a força do corpo e $\bar{g_D} = 0$ em Γ_D. Encontre $\{\sigma_h, u_h, \bar{u}_h\} \in X_h$ tal que

$$\mathbf{B}(\{\sigma_h,\; u_h,\; \hat{u}_h\}, \{\tau_h,\; v_h,\; \bar{v}_h\}) \;=\; \mathbf{F}(\{\tau_h,\; v_h,\; \bar{v}_h\}) \quad \forall\{\tau_h,\; v_h,\; \bar{v}_h\} \in X_h, \tag{9}$$

com

$$\mathbf{B}(\{\sigma_h,\; u_h,\; \bar{u}_h\}, \{\tau_h,\; v_h,\; \bar{v}_h\}) \;=\; \sum_{K\in T_h} \{\, \tfrac{1}{2}(D\sigma_h,\; \tau_h)_k + \delta_1(div(\sigma_h),\; div(\tau_h)_k$$
$$-\, \tfrac{1}{2}\; (C\, \nabla^S u_h,\; \nabla^S v_h)_k \;+\; (u_h,\; div(\tau_h)_k) \;+\; (div(\sigma_h), v_h)_k \;+\; \tfrac{1}{2}(\sigma_h,\; \nabla^S v_h)_k$$
$$+\, \tfrac{1}{2}(\nabla^S u_h,\; \tau_h)_k \;-\; \beta_0\; h^{-1}((\hat{u}_h - u_h),\; (\hat{v}_h - v_h))_{\partial K} - (\hat{u}_h,\; \tau_h \cdot n)_{\partial K}$$
$$-\, (\sigma_h \cdot n, \hat{v}_h)_{\partial K}\}, \qquad (10)$$

e

$$\mathbf{F}(\{\tau_h,\; v_h,\; \hat{v}_h\;\}) \;= \sum_{K\in T_h}\{-\,(f,\; v_h)_k - \delta_1\,(f,\; div(\tau_h))_k - (\bar{g_N},\; \hat{v}_h)_{\partial K\,\cap\,\Gamma_N}\}) \tag{11}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta é uma abordagem essencial em simulações numéricas e análise de problemas complexos , sua capacidade de lidar com problemas multi-físicos, incompressibilidade, estabilidade numérica e adaptação de malha torna-a uma ferramenta fundamental em simulações avançadas e projetos de engenharia.

Conclui-se desta forma que apesar de o objetivo principal não ter sido alcançado, outros processos produtivos foram desenvolvidos, sendo tais de grande importância para o desenvolvimento como pesquisador científico.

REFERÊNCIAS

1. DOS SANTOS, GERALDO; LOULA, ABIMAEL ; SANTOS, ANTONIO . A Stabilized Hybrid-Mixed Finite Element Formulation for the Elasticity Problems. In: CNMAC 2016 XXXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2017, Gramado, 2016. v. 5.