UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIV SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2020

VALORIZAÇÕES EM SOBCORPOS QUADRÁTICOS EM ÁLGEBRA DE QUATÉRNIOS SOBRE OS RACIONAIS

Henrique Santos Neves[1] **e Maurício de Araújo Ferreira** [2]

[1]Bolsista PROBIC/UEFS, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: hs_neves@outlook.com
[2]Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: maferreira@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Valorização; Quatérnios; Extensão.

INTRODUÇÃO

A *Teoria de Valorização* teve início em 1912, quando o matemático húngaro Josef Kurschák formulou os axiomas de *valorização em corpos*. A principal motivação foi a tentativa de melhorar a fundamentação da teoria de *corpos p-ádicos* definidos por Kurt Hensel. Nas décadas seguintes houve um rápido desenvolvimento da Teoria de Valorização, após a descoberta de que muitos problemas da *Teoria de Números Algébricos* poderiam ser melhores entendidos com o uso de métodos da Teoria de Valorização. A eficiência da Teoria de Valorizações no estudo de corpos levou a tentativa natural de tentar generalizar este conceito para estruturas mais gerais, como por exemplo, em *álgebra de Quatérnios*, tais extensões poderiam ser chamadas de *valorizações não-comutativas*.

Este projeto foi uma continuação dos estudos e trabalhos financiado pela PROBIC/UEFS segundo edital PPPG-IC/UEFS Nº 01/2018, com o seguinte título de plano de trabalho: Anéis de Valorização em Álgebra de Quatérnios. Na Pesquisa anterior desenvolvemos estudos sobre os Quatérnios, *Extensões de corpos* e mais particularmente *Extensões Quadráticas* dos racionais. Além disso, através do comportamento de tais valorização sobre estas extensões podemos reunir informações importantes sobre o Álgebra dos Quatérnios. Este estudo foi uma continuação direta destes estudos, onde retomamos as pesquisas sobre Extensão de Corpos e Quatérnios, focando principalmente em valorizações sobre extensões quadrática, onde o nosso objetivo era criar condições necessárias e suficientes para decidir quando tal valorização possuirá extensão em uma álgebra de quatérnios.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A pesquisa é de natureza teórica. O ponto de partida foi o levantamento bibliográfico. Neste ponto, buscamos os resultados que já são conhecidos e as técnicas utilizadas para obtê-los. Foram estudados a estrutura de anéis de valorizações em corpos, principalmente no caso das valorizações p-ádicas no corpo dos racionais. A partir daí partimos para investigar extensões de corpos, conjuntamente com isso, o comportamento de uma valorização sobre essa extensão, estudando o seu grau residual, seu índice de ramificação e a equivalência entre duas valorizações. E para finalizar, pesquisamos condições sobre as quais a valorização p-ádica teria extensão únicas sobre uma extensão quadrática dos racionais.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

A revisão bibliográfica foi importante para a reunião de resultados e técnicas já obtidas ao longo dos estudos da Teoria de Valorização, o qual possibilitou um melhor tratamento de nosso problema, ou seja, resultados e discussão deste trabalho surgem de definições e lemas anteriores que são de suma importância. Detalharemos a seguir as informações principais dos objetos matemáticos e além disso as proposições mais importantes para este trabalho.

Definição 1: Seja $(\Gamma, \leq)$ um grupo abeliano aditivo totalmente ordenado e ∞ é maior que todo elemento de Γ, $\infty + x = \infty$ e $\infty + \infty = \infty$ para todo $x \in \Gamma$. Definimos uma *valorização* v sobre um corpo K, como a função sobrejetora

$$v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\},$$

satisfazendo as seguintes condições para todo $x, y \in \Gamma$:

(i) $v(x) = \infty \iff x = 0$;

(ii) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$;

(iii) $v(x+y) \geq min\{v(x), v(y)\}$.

Obsevação 2: Chamaremos o grupo Γ de grupo de valores.
Exemplo 3: Seja $p \in \mathbb{Q}$ um número primo. Para todo número racional $x \in \mathbb{Q}^{\times}$, temos pelo *Teorema Fundamental da Aritmética* que existem únicos $\alpha, a, b \in \mathbb{Z}$, tais que

$$x = p^{\alpha} \cdot \frac{a}{b}, \text{ com } p \nmid a \cdot b.$$

A função à seguir é um valorização sobre $\mathbb{Q}$, a qual chamamos de valorização p-ádica:

$$v_p : \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

$$v_p(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x \neq 0; \\ \infty, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta valorização recebe um nome especial de valorização p-ádica e é parte importante em nosso trabalho. Note que o grupo de valores de v_p é $\mathbb{Z} = v_p(\mathbb{Q}^{\times})$. Além disso, toda valorização no corpo dos racionais será uma valorização p-ádica ou é a *Valorização Trivial* que consiste em ter a imagem de todos os elementos não-nulos 0 e a imagem de 0 é ∞, este é o Teorema 2.1.4 da seção 2.2 apresentado e demonstrado em ENGLER e PRESTEL (2006).

Da definição de valorização podemos definir um conjunto $O_v := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ o qual é um subanel de K chamado *anel de valorização* deste corpo. Tal anel de valorização possui um único *ideal máximal* $M_v : \{x \in K \mid v(x) > 0\}$, tornando um *Anel Local*. Logo, definimos o corpo $\overline{K_v} := \dfrac{O_v}{M_v}$, qual chamaremos de *corpo de classe de resíduo*.

Dados uma extensão de corpos L/K e duas valorizações v_1, v_2, onde v_1, v_2 são valorizações sobre L e K, respectivamente. Dizemos que v_1 é uma *extensão* de v_2 quando $O_{v_2} \subset O_{v_1}$. De certa forma, é natural pensar se o mesmo ocorre quando usamos uma definição análoga para extensão, mas com L tendo uma estrutura mais geral do que a de um corpo como, por exemplo, *anel de divisão*. WADSWORTH (1986) respondeu a esta pergunta quando L é um anel de divisão, encontrando uma condição para a existência de tal extensão o qual está expressa no Teorema 4.

Teorema 4 Seja D um anel de divisão com dimensão finita sobre seu centro F e v uma valorização sobre F. Então, v se estende para uma valorização sobre D se, e somente se, v tem uma extensão única para todo corpo K, com $F \subseteq K \subseteq D$.

Estamos interessados quando $F = \mathbb{Q}$ e $D = (u,v)_{\mathbb{Q}}$, onde $(u,v)_{\mathbb{Q}} := \{a+bi+cj+dk \mid i^2 = u, j^2 = v, k^2 = -uv$ e $a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$, com $u,v \in F$. D é chamado de *Quatérnios*. Temos que D é uma álgebra de divisão de dimensão quatro sobre os racionais. Portanto, dado v_p uma valorização p-ádica, terá uma extensão sobre D se, e somente se, tiver extensão única sobre todo corpo K, tal que $F \subseteq K \subseteq D$. Tal corpo K é uma extensão quadrática sobre $\mathbb{Q}$, ou seja, $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ com $d \in \mathbb{Q}$ livre de quadrados. Logo, precisamos saber para qual dupla (p,d) existe extensão para v_p em $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ e quando tal extensão é única. É possível responder à primeira questão com o Teorema 3.1.2 da seção 3.1, presente em ENGLER e PRESTEL (2006):

Teorema 5: Seja K_2/K_1 uma extensão de corpos, e seja O_1 um anel de valorização K_1, então existe O_2, uma extensão de O_1 em K_2.

Assim concluímos que sempre existe um extensão e não depende da dupla (p,d). Para responder a segunda questão é necessário definir duas noções importantes. Dadas uma extensão $(K_1,O_1) \subset (K_2,O_2)$, correspondendo a $v_i : K_i \twoheadrightarrow \Gamma_i \cup \{\infty\}$, para todo $i = 1,2$. O número $f = f(O_2,O_1) = [\overline{K_2} : \overline{K_1}]$ será chamado de *grau resídual*, enquanto que o número $e = e(O_2,O_1) = [\Gamma_2 : \Gamma_1]$ será chamado de *índice de ramificação*. Quando a extensão K_2/K_1 é finita vale que $e,f < \infty$ e $e \cdot f \leq n = [K_2 : K_1]$. O teorema à seguir é apresentado como Teorema 3.3.5 na seção 3.3 de ENGLER e PRESTEL (2006).

Teorema 6 Seja O um anel de valorização de um corpo F , com grupo de valores $\mathbb{Z}$, e sejam $O_1, O_2, \cdots, O_m$ extensões de O em uma extensão K, finita e separável de F. Então

$$[L:K] = \sum_{i=1}^{m} e(O_i,O) f(O_i,O).$$

Através do Teorema 6 podemos limitar a quantidade de extensões possíveis para a valorização

v_p. Como o $[\mathbb{Q}[\sqrt{d}] : \mathbb{Q}] = 2$, concluímos a existência de três possibilidades:

(i) Existe uma única extensão com $e(O_1, O) = 2$ e $f(O_1, O) = 1$;

(ii) Existe uma única extensão com $e(O_1, O) = 1$ e $f(O_1, O) = 2$;

(iii) Existe duas extensões com $e(O_1, O) = e(O_2, O) = f(O_1, O) = f(O_2, O) = 1$.

Veja que não haverá extensão para D se acontecer conforme item (iii), portanto devemos saber quando a dupla (p, d) dará origem ao item (iii). Conforme nossos estudos identificamos as únicas possibilidade para $v_p(d) = \pm 1$ ou $v_p(d) = 0$. Assim,

Teorema 7 Dados v_p uma valorização p-ádica e $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ uma extensão quadrática de $\mathbb{Q}$, com d livre de quadrados.

(i) Se $|v_p(d)| = 1$, então existe uma única extensão O_1 de O em $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, tal que $e(O_1, O) = 2$ e $f(O_1, O) = 1$;

(ii) Se $v_p(d) = 0$ e o polinômio $x^2 - \overline{d}$ for irredutível sobre $\mathbb{Z}_p$, então existe uma única extensão O_1 de O em $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, tal que $e(O_1, O) = 1$ e $f(O_1, O) = 2$;

(iii) Se $v_p(d) = 0$ e polinômio $x^2 - \overline{d}$ for redutível sobre Z_p, então existem duas extensão para a valorização v_p em $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Portanto, a única possibilidade onde não há extensão de v_p em D é quando a dupla (p, d) satisfaz o item (iii).

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

Concluímos que este trabalho contribuiu muito para a formação acadêmica do bolsista, além de auxilia-lo no seu pensamento científico e matemático, sendo muito importante para sua carreira profissional. Conseguimos pesquisar , estudar as questões envoltas ao problema inicial e concluir de maneira satisfatória. Através de corpos intermediário entre $\mathbb{Q}$ e D buscamos informações que contribuíram para encontrar um relação sobre p e d para que houvesse a extensão para álgebra de quatérnios.

REFERÊNCIAS

BORGES, H.; TENGAN, E. Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

ENGLER, A. J.; PRESTEL, A. Valued Field. Springer-Verlag, 2006.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. Elementos de Álgebra. 6ª ed. Rio de Janeiro: Editora IMPA (Projeto Euclides), 2018.

GONÇALVES, A. Introdução à Álgebra. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

LANG, S. Algebra. Menlo Park, Califórnia: Editora Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.

WADSWORTH, A. R.: Extending valuations to finite-dimensional division algebras. Proc. Amer. Math. Soc. v. 98 (1986), no. 1, 20—22.