Sequências Exatas Curtas de Grupos

Marcos Weslley Vitória Brandão[1] **e Kisnney Emiliano de Almeida** [2]

[1]Bolsista PIBIC/FAPESB, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: weslleymarcos10@gmail.com
[2]Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: kisnney@gmail.com

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de Grupos; Sequências Exatas; Produto Semidireto.

INTRODUÇÃO

Sequências exatas de grupos configuram uma construção extremamente relevante para a Teoria de Grupos (ELLIS, 1987); (STAMMBACH, 2006). Essa construção, bem como outras construções relacionadas de outras áreas, também é utilizada há décadas como ferramenta de investigações em matemática pura e aplicada, em áreas como Análise Funcional (PIMSNER, 1980); (EXEL, 1994), Topologia Algébrica (WHITEHEAD, 1950); (BENKHALIFA, 2010) e Análise Topológica de Dados (CURRY, 2015). O conceito de sequência exata de grupos, dentre outras aplicações, pode ser utilizado para o estudo de grupos de homologia e resoluções de grupos.

As sequências exatas de grupos são sequências ordenadas de grupos e homomorfismos entre cada grupo e seu sucessor, de forma que a imagem de cada homomorfismo está contida no núcleo do homomorfismo seguinte. As sequências exatas curtas de grupos são um caso particular de sequências exatas de grupos, formadas por cinco grupos, sendo o primeiro e o último grupos triviais. Neste trabalho será apresentada a definição mais precisa das sequências exatas curtas e também alguns exemplos e aplicações. Além disso, será mostrado o caso em que o grupo central da sequência exata curta é isomorfo a um produto semidireto dos grupos intermediários e também o caso em que duas sequências exatas são isomorfas.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada em duas partes. A parte inicial da pesquisa foi composta por consultas à literatura (CONRAD) e encontros particulares com o orientador a fim de que o aluno pudesse apresentar tudo o que havia sido observado a respeito do estudo proposto. Esses encontros foram realizados numa sala com quadro branco e este foi utilizado como um suporte para as apresentações.

Na parte final da pesquisa, além de (CONRAD) foram também utilizadas (MILNE, 1996) e (ROTMAN, 2012). Nessa parte foram realizadas reuniões online por meio de videoconferências, em que os resultados das investigações eram apresentados pelo aluno para o orientador e este avaliava todo o processo.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na introdução foi dito que uma sequência exata é uma sequência ordenada de grupos e homomorfismos entre cada grupo e seu sucessor, de tal modo que a imagem de cada homomorfismo está contida no núcleo do homomorfismo seguinte. A definição a seguir apresenta esse conceito de modo preciso.

Definição 1. Uma sequência de grupos e homomorfismos de grupos

$$G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} G_n$$

é dita *exata* em cada G_i, para $1 < i < n$, se $Im(\alpha_{i-1}) = Ker(\alpha_i)$.
Dentre as sequências exatas existem aquelas que são formadas por cinco grupos em sequência com os grupos dos extremos isomorfos iguais ao grupo trivial. A definição apresentada a seguir mostra isso de forma precisa.

Definição 2. Uma *sequência exata curta de grupos* é uma sequência de grupos e homomorfismos de grupos

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

exata em N, G e K. E disso decorrem as seguintes afirmações:

1. $\alpha : N \longrightarrow G$ é injetiva;
2. $Im(\alpha) = Ker(\beta)$;
3. $\beta : G \longrightarrow K$ é sobrejetiva.

Nestas condições dizemos que G é uma *extensão* de N por K.

Exemplo 1. O grupo $\mathbb{Z}_4$ é uma extensão de $\mathbb{Z}_2$ por $\mathbb{Z}_2$, conforme observamos pela seguinte sequência exata curta em que $\alpha(\overline{1}) = \overline{2}$, $\beta(\overline{0}) = \beta(\overline{2}) = \overline{0}$ e $\beta(\overline{1}) = \beta(\overline{3}) = \overline{1}$.

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

Exemplo 2. Dado um produto semidireto $N \rtimes_\sigma K$, podemos associá-lo naturalmente à sequência exata curta a seguir:

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} N \rtimes_\sigma K \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1,$$

com $\alpha(n) = (n, 1_K)$ para todo $n \in N$ e $\beta(n,k) = k$ para todo $(n,k) \in N \rtimes_\sigma K$.
Um exemplo específico de sequência exata curta do produto semidireto é o seguinte:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_3 \rtimes_\tau \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

onde $\tau : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Aut(\mathbb{Z}_3)$ é o homomorfismo dado por $\tau(\overline{1}) = \rho$, com $\rho : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ sendo o automorfismo de $\mathbb{Z}_3$ definido como $\rho(\overline{1}) = \overline{2}$, e os homomorfismos são dados por $\alpha(\overline{1}) = (\overline{1}, \overline{0})$ e $\beta(\overline{1}, \overline{0}) = \overline{0}$, $\beta(\overline{0}, \overline{1}) = \overline{1}$.

Assim como grupos que apresentam muitas semelhanças são considerados isomorfos, pode-se pensar em sequências equivalentes, ligadas por isomorfismos que formam um diagrama comutativo. Isso será apresentado de forma precisa por meio da definição seguinte.

Definição 3. Dizemos que uma sequência exata curta de grupos

$$1 \longrightarrow N_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow K_1 \longrightarrow 1$$

é *equivalente* a uma outra sequência exata curta

$$1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow G_2 \longrightarrow K_2 \longrightarrow 1$$

quando existe um *isomorfismo de sequência* , isto é, quando existem homomorfismos de forma que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

comuta, sendo as aplicações verticais isomorfismos. Nesse caso dizemos também que as sequências são isomorfas.

Certas sequências exatas curtas são tais que o grupo central é isomorfo a um produto semidireto dos grupos intermediários. Quando isso acontece, diz-se que tais sequências *cindem*. As sequências que cindem são as sequências que possuem as propriedades equivalentes exibidas no teorema abaixo.

Teorema 1. Sejam G, N, K grupos e a sequência exata curta de grupos

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 1$$

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Existe um homomorfismo $\beta' : K \longrightarrow G$ tal que $\beta(\beta'(k)) = k$, para todo $k \in K$;

2. Existem um homomorfismo $\sigma : K \longrightarrow Aut(N)$ e um isomorfismo $\theta : G \longrightarrow N \rtimes_\sigma K$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N \rtimes_\sigma K & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

   comuta, sendo que a linha inferior é a sequência exata curta do produto semidireto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Além dos resultados exibidos acima, muitos exemplos foram explorados como aplicações. No decorrer do trabalho, foram estudados o grupo dos Quatérnios (que não pode ser escrito como produto semidireto), o grupo linear de geral de ordem 2 sobre o corpo K (que é produto semidireto de dois de seus subgrupos), dentre outros. Com isso, foi possível entender o amplo alcance dos conceitos estudados.

REFERÊNCIAS

BENKHALIFA, Mahmoud. "The certain exact sequence of Whitehead and the classification of homotopy types of CW-complexes. Topology and its Applications", v. 157, n. 14, p.2240-2250, 2010.

CONRAD, K. "Splitting of short exact sequences for groups". Disponível em "https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/splittinggp.pdf".

CONRAD, K. "*Representations of Aff(Fq) and Heis(Fq)*". Disponível em "https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/affineheisrep.pdf".

CURRY, Justin Michael. "Topological data analysis and cosheaves". Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, v. 32, n. 2, p.333-371, 2015.

ELLIS, Graham J. "Non-abelian exterior products of groups and exact sequences in the homology of groups". Glasgow Mathematical Journal, v. 29, n. 1, p.13-19, 1987.

ELLIS, Graham J. "Non-abelian exterior products of groups and exact sequences in the homology of groups". Glasgow Mathematical Journal, v. 29, n. 1, p.13-19, 1987.

EXEL, Ruy. "Circle actions on C*-algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence". Journal of functional analysis, v. 122, n. 2, p.361-401, 1994.

MILNE, James S. Group theory. Version, 1996.

PIMSNER, Mihai; VOICULESCU, Dan. "Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C*-algebras". Journal of Operator Theory, p. 93-118, 1980.

ROTMAN, J. J. An introduction to the theory of groups. Springer Science & Business Media, 2012.

STAMMBACH, Urs. Homology in group theory. Springer, 2006.

WHITEHEAD, John HC. "A certain exact sequence". Ann. of Math, v. 52, n. 2, p. 51-110, 1950.