UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIV SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2020

Equação de Sine-Gordon e sua relação com Superfícies Regulares

Matheus Costa Mota[1] **e Claudiano Goulart** [2]

[1]Bolsista PEVIC/UEFS, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: matheuscm9@hotmail.com
[2]Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: cgoulart@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Superfícies Regulares; Formas Diferenciais; Equação de Sine-Gordon.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo apesentar a *Equação de Sine-Gordon* e sua relação com *Superfícies Regulares*. Buscando alcançar este objetivo, iniciamos nossos estudos com a noção de superfícies no espaço Euclidiano, e os conceitos envolvidos com esta teoria tais como formas fundamentais, aplicação normal de Gauss e curvaturas. Finalizada esta primeira etapa, nos dedicamos ao estudo da teoria de *formas diferenciais* em R^2 e *método do triedro móvel*, conceitos fundamentais para a compreensão do tema proposto. Finalmente, de posse destes conceitos foi possível compreender a relação biunívoca entre soluções de *equação de sine-Gordon* e as *superfícies linear Weingarten hiperbólica* imersas em R^3, em especial as superfícies com *curvatura Gaussiana* constante negativa.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A metodologia utilizada foi estudos individuais de tópicos pré selecionados e discussão semanais com o orientador. No período de distancimento social mantivemos a metodologia, porém as discussões semanais deixaram de ser presenciais e ocorreram por reuniões virtuais, através da plataforma Google Meet.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

No decorrer do trabalho conseguimos fazer o estudo dos conteúdos básicos em Geometria Diferencial, como curvas e superfícies no espaço Euclidiano tridimensional. Na primeira etapa do trabalho, nosso foco principal foi o estudo das superfícies e dos conceitos relacionados a elas tais como primeira e segunda forma fundamentais, além disso o estudo de curvatura Gaussiana e curvatura média de uma superfície, tendo em vista que esses conteúdos iniciais foram essenciais para a compreensão do tema proposto. Nesta primeira etapa, usamos as referências [1] e [3]. Após isso, estudamos as formas diferenciais, vendo sua definição, operações envolvendo a mesma e algumas proposições. O que nos possibilitou estudar o método do triedro móvel e, posteriormente, as equações de estrutura. Maiores detalhes desta teoria podem ser encontrados em [2] e [3].

Assim conseguimos finalizar os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do tema proposto. Nesta última etapa do trabalho, estudamos dois resultados importantes relacionados ao tema proposto. O primeiro afirma que quando uma superfície linear Weingarten hiperbólica está parametrizada por linhas de curvatura, sua primeira forma fundamental está em correspondência com solução da equação de sine-Gordon. O segundo resultado é um corolário do anterior e trata especificamente do caso de superfícies com curvatura Gaussiana constante negativa. Os dois resultados, cuja demonstração detalhada pode ser encontrada em [4], são apresentados abaixo.

Teorema 1: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície linear Weingarten que satisfaça $1+2\beta H+\gamma K = 0$, onde $\gamma \neq 0$ e $D = \gamma - \beta^2 > 0$. Suponha que em cada ponto haja duas curvaturas principais distintas. Então existem coordenadas locais $u,\ v$ para S e uma função $\varphi(u,v)$ satisfazendo a equação diferencial

$$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = sen(c+\varphi).$$

onde c é a constante definida por

$$sen\ c = \frac{2\varepsilon\beta\sqrt{D}}{\gamma}, \quad cos\ c = \frac{\gamma - 2\beta^2}{\gamma}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Por outro lado, para qualquer solução $\varphi(u,\ v)$ da equação diferencial acima existe uma superfície linear Weingarten $S \subset \mathbb{R}^3$ satisfazendo $1+2\beta H+\gamma K = 0$, com $\gamma > 0$ e $D = \gamma - \beta^2 > 0$, cuja primeira forma fundamental é dada por $I = g_1^2 dx_1^2 + g_2^2 dx_2^2$, onde

$$g_1 = \sqrt{\gamma} cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),\ g_2 = \sqrt{\gamma} sen\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Corolário 2: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de curvatura Gaussiana constante $K < 0$ contida em $\mathbb{R}^3$. Existem coordenadas locais *u, v* e uma função $\varphi(u,v)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = -K sen\ \varphi.$$

Por outro lado, suponha que φ é uma solução da equação acima. Existe uma superfície de curvatura Gaussiana constante $k < 0$ em $\mathbb{R}^3$, que é única a menos de movimento rígido de $\mathbb{R}^3$, cuja primeira forma fundamental é dada por

$$I = cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) dx_1^2 + sen^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) dx_2^2.$$

O seguinte exemplo ilustra esses resultados.

Exemplo 3: Consideremos a família de superfícies em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$X(u,v) = (sechucosv,\ sechusenv,\ u - sechusenhu) - a(tghucosv,\ tghusenv,\ sechu),$$

onde a é uma constante real. Vejamos abaixo a representação gráfica para valores distintos atribuídos para a(Figuras 1 e 2).

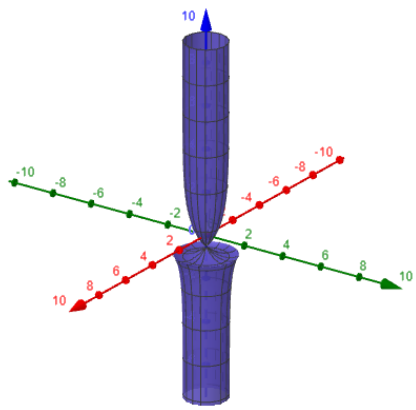

Figura 1: $a = 1$

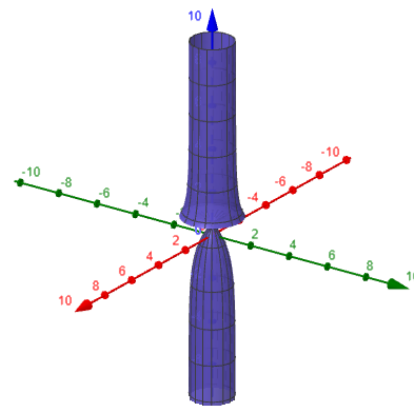

Figura 2: $a = -1$

Observamos que as curvaturas Gassiana K e média H da superfície $X(u,v)$ são dadas por

$$\begin{aligned} K &= \frac{sech(u)tgh(u)}{(a^2-1)sech(u)tgh(u)+a(-sech(u)+tgh(u))}, \\ H &= \frac{2asech(u)tgh(u)-sech^2(u)+tgh^2(u)}{2(1-a^2)sech(u)tgh(u)-2a(-sech^2(u)+tgh^2(u))} \end{aligned}$$

Desta forma, exceto em seus pontos singulares, cada superfície desta família é do tipo linear Weingaten hiperbólica satisfazendo a equação $1+2aH+a^2K=0$. A primeira forma de X é dada por

$$I = sech^2(u)((a+senh(u))^2du^2+(1-asenh(u))^2dv^2).$$

Considere uma função φ tal que

$$cos(\frac{\varphi}{2}) = \frac{tgh(u)+asech(u)}{\sqrt{1+a^2}}, \; sen(\frac{\varphi}{2}) = \frac{sech(u)-atgh(u)}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Pode-se mostrar que φ é uma solução da equação diferencial

$$\varphi_{uu}-\varphi_{vv} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}sen(\varphi+c),$$

onde c é uma constante real dada por $c = arctg(\frac{2a}{1-a^2})$.

Observemos que o caso $a = 0$ corresponde à pseudo-esfera(Figura 3), cuja curvatura Gaussiana é $K = -1$.

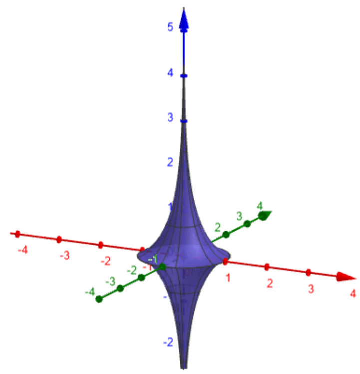

Figura 3: Pseudo-esfera

Fazendo a=0, nos cálculos anteriores, vamos obter

$$cos(\frac{\varphi}{2}) = tgh(u),\ sen(\frac{\varphi}{2}) = sech(u).$$

Além disto, φ é uma solução da equação diferencial

$$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = sen\varphi.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

Nesse trabalho, estudamos os conhecimentos básicos de Geometria Diferencial, como o conceito de curvas e superfícies no espaço Euclidiano tridimensional, e algumas de suas proposições necessárias para o estudo do tema principal. Em seguida, fizemos o estudo de formas diferenciais e método do triedro móvel, o qual possibilitou chegar nas equações de estrutura. Com o estudo dos temas básicos, foi possível chegarmos ao estudo do tema principal, que é a relação entre Equação de Sine-Gordon e superfícies lineares de Weingarten. No decorrer do estudo do tema, foi possível estudar alguns teoremas e corolários envolvendo a relação entre equações diferenciais e superfícies, como também vimos alguns exemplos no qual aplicamos essa teoria. Somado a isso, analisamos graficamente, exemplos de superfícies associadas a equação de Sine-Gordon.

REFERÊNCIAS

1. do Carmo, M. C., Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Tradução: Pedro Roitman. 2ª ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
2. do Carmo, M. C., O Método o referencial móvel. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
3. Tenenblat, K., Introdução à Geometria Diferencial. 2ª ed. Revisada – São Paulo: Blucher, 2008.
4. Tenenblat, K., Transformations of manifolds and applications to differential equations. Addison Wesley Longman, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics # 93, 1998.