UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIV SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2020

TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND EM $\mathbb{R}^3$

Matheus Hernandes dos Santos Ferreira[1] **e Claudiano Goulart** [2]

[1]Bolsista PROBIC/UEFS, Graduando em licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: hernandesl@hotmail.com
[2]Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: cgoulart@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Superfícies regulares; Formas diferenciais; Transformação de Bäcklund.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como principal objetivo, estudar de maneira detalhada o Teorema de Bäcklund, no espaço $\mathbb{R}^3$, em sua versão mais recente (veja, por exemplo, [3]), além de explorar os pré-requisitos necessários para seu entendimento, como também analisar a definição de Congruência geodésica-pseudo esférica. Este estudo nos possibilitou obter uma transformação entre duas superfícies, conhecida como transformação de Bäcklund, com a qual é possível construir uma família a dois parâmetros de superfícies de curvatura Gaussiana negativa a partir de uma dada superfície com esta mesma curvatura.

Como consequência da interpretação analítica desta transformação, em termos de soluções da equação de sine-Gordon, foi possível estudar a construção da superfície de Keun, obtida por uma Transformação de Bäcklund da pseudoesfera. Com o auxílio do Software GeoGebra, visualizamos uma representação gráfica dessas superfícies.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A metodologia utilizada na pesquisa foi de natureza teórica, apurados em artigos científicos disponíveis na internet, livros disponíveis na biblioteca da UEFS e arquivos do próprio orientador, realizando uma fundamentação da teoria necessária para a discussão do tema principal da pesquisa. Assim, foi realizado um estudo em bibliografias já existentes sobre Geometria Diferencial e transformações de Bäcklund.

Inicialmente foram estudados os conteúdos base para a compreensão do tema. Deste modo, foram estudados os conceitos básicos de Geometria diferencial, tendo como referência os livros de Manfredo Perdigão do Carmo[1] e Keti Teneblat[2], seguido de uma abordagem das formas diferenciais em $\mathbb{R}^2$, método do triedro móvel, formas de conexão e equações de estruturas, também encontrados em [2]. Após a compreensão destes conteúdos, foi feito um estudo da definição de congruência geodésica pseudo-esférica e o Teorema de Bäcklund, junto com sua demonstração, encontrado em [3]. Por fim, foi realizado o estudo de exemplos e construção de gráficos relacionado as Transformações de Bäcklund para superfícies de curvatura Gaussiana constante negativa. Durante todo o processo de pesquisa, foram realizados encontros semanais para discussão do tema com o orientador. Para visualização dos exemplos relacionados com as transformações de Bäcklund, foi utilizado o Software GeoGebra.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

Apresentaremos, a seguir, os(as) principais definições, teoremas e proposições relacionados ao tema principal da pesquisa, além de alguns exemplos e construções gráficas. Iniciaremos com a seguinte definição.

Definição 1.1 (Congruência geodésica pseudo-esférica) Seja $l : M \to M'$ um difeomorfismo entre duas superfícies em $\mathbb{R}^3$ de modo que para cada $p \in M$, e $p' = l(p) \neq p$, o vetor diretor da reta que une p e p' esteja em T_pM e $T_{p'}M'$. Dizemos que l é uma congruência geodésica pseudo-esférica se: a distância entre p e p' em $\mathbb{R}^3$ é uma constante r, independente de p; o ângulo entre os normais N_p e ${N'}_{p'}$ é uma constante θ indepentende de p.

O teorema a seguir, informa que duas superfícies nas condições da definição anterior possuem a mesma curvatura Gaussiana constante negativa.

Teorema 1.2 (Teorema de Bäcklund) Seja M e M' duas superfícies contidas em $\mathbb{R}^3$. Suponha que $l :\ M \to M'$ é uma congruência geodésica pseudo-esférica tal que a distância entre o ponto correspondente p, p' é uma constante $r > 0$ e o ângulo entre as normais em p e p' é uma constante θ, $0 \leq \theta \leq \pi$. Então M e M' tem curvatura Gaussiana constante K, onde

$$K \ = \ -\frac{sen\theta}{r^2}$$

O teorema anterior nos permite construir a transformação de Bäcklund a partir de uma superfície de curvatura Gaussiana negativa. Com o auxílio do seguinte resultado, podemos fornecer uma interpretação analítica para esta transformação.

Proposição 1.3 Seja M uma superfície de curvatura Gaussiana negativa constante K contida em $\mathbb{R}^3$. Existem coordenadas locais u, v para M e uma função $\varphi(u, v)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\varphi_{uu} \ - \ \varphi_{vv} \ = \ -Ksen(\varphi) \qquad (i)$$

Por outro lado, para cada solução φ de (i), existe uma superfície de curvatura Gaussiana constante negativa K, em $\mathbb{R}^3$, única a menos de movimento rígido, cujas primeira e segunda forma fundamentais são dadas respectivamente por

$$I \ = \ cos^2\frac{\varphi}{2}du^2 + \ sen^2\frac{\varphi}{2}dv^2$$

$$II \ = \ \sqrt{|K|}sen\frac{\varphi}{2}cos\frac{\varphi}{2}(du^2 - dv^2)$$

A proposição anterior nos fornece a seguinte interpretação analítica para o Teorema 1.2.

Teorema 1.4 Seja $\varphi(u,v)$ uma solução da equação sine-Gordon

$$\varphi_{uu} \;-\; \varphi_{vv} \;=\; sen(\varphi) \qquad (ii)$$

e seja θ uma constante. Então, o sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned} \varphi'_u + \varphi_v &= \quad 2sen\frac{\varphi'}{2}cos\frac{\varphi}{2}cossec\theta + 2cos\frac{\varphi'}{2}sen\frac{\varphi}{2}cotg\theta \\ \varphi'_v + \varphi_u &= \; -2cos\frac{\varphi'}{2}sen\frac{\varphi}{2}cossec\theta - 2sen\frac{\varphi'}{2}cos\frac{\varphi}{2}cotg\theta \end{aligned} \qquad (iii)$$

é integrável. Além disso, φ' também é solução da equação sine-Gordon (ii).

O resultado anterior nos permite construir o seguinte exemplo.

Exemplo 1.5 Considerando a pseudo esfera em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$X(u,v) = (sech(u)cos(v), sech(u)sen(v), tgh(u) - u)$$

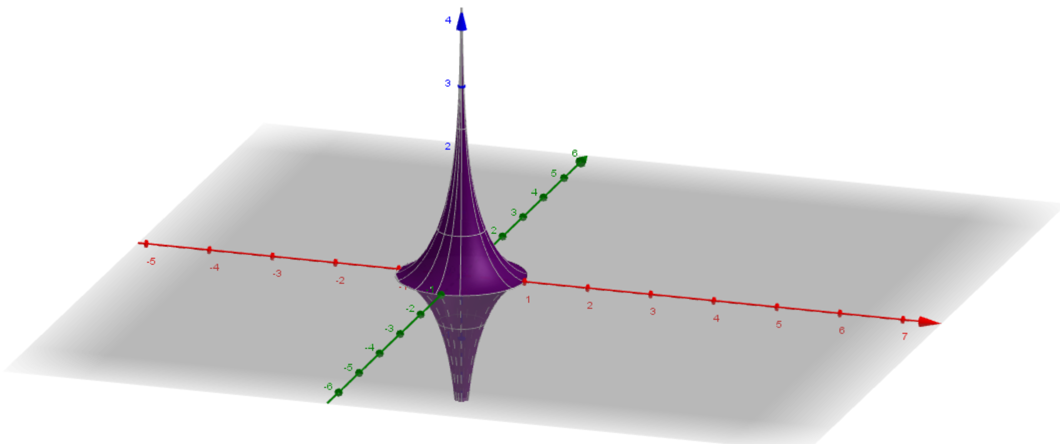

Figura 1: Superfície dada por $X(u,v)$

A primeira forma fundamental de X é dada por $I \;=\; cos^2(\varphi/2)du^2 + \;\; sen^2(\varphi/2)dv^2$ tal que

$$cos\frac{\varphi}{2} = tgh(u),\; sen\frac{\varphi}{2} = sech(u)$$

A curvatura da pseudo-esfera é $K = -1$. Para obter uma nova superfície, com esta mesma curvatura, vamos fazer uso da transformação de Bäcklund $BT(\pi/2)$. Tomando $\theta = \pi/2$ em (iii), obtemos que φ' deve satisfazer o sistema de EDO

$$\begin{aligned} \varphi'_u &= 2sen\frac{\varphi'}{2}tgh(u) \\ \varphi'_v &= 2(1 - cos\frac{\varphi'}{2})sech(u) \end{aligned}$$

cujas soluções são dadas por

$$cotg\frac{\varphi'}{4} = (-v+c)sech(u).$$

Assim, usando o Teorema de Bäcklund, obtemos a superfície X', parametrizada por:

$$X'(u,v) = \left(\frac{2cosh(u)(cos(v)-(-v+c)sen(v))}{(-v+c)^2+cosh^2(u)}, \frac{2cosh(u)(sen(v)+(-v+c)cos(v))}{(-v+c)^2+cosh^2(u)},\right.$$

$$\left., \frac{senh(2u)}{(-v+c)^2+cosh^2(u)} - u\right)$$

Esta superfície é denominada de Superfície de Kuen.

Considerando $c = 0$, podemos, com o auxílio do GeoGebra, obter uma representação gráfica desta superfície (Figura 2)

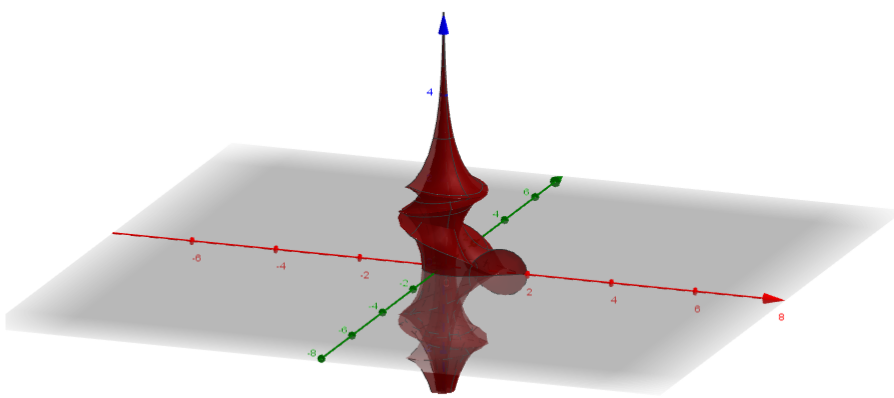

Figura 2: Superfície dada por $X'(u,v)$

Portanto, durante a pesquisa, conseguimos compreender os conceitos requisitados, além de analisar, algebricamente e geometricamente, exemplos envolvendo a Transformação de Bäcklund, obtendo conhecimentos que não seriam vistos em disciplinas da graduação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

A realização dessa pesquisa auxiliou na compreensão de diversos conceitos presentes no ramo da geometria diferencial, área muito importante de matemática. Assim, proporcionou um grande ganho de experiência e conhecimento nesta área da Matemática, contribuindo para a formação acadêmica e profissional.

REFERÊNCIAS

1. do Carmo, M. C., Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Tradução: Pedro Roitman. 2ª ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
2. Tenenblat, K., Introdução à Geometria Diferencial. 2ª ed. Revisada – São Paulo: Blucher, 2008.
3. Tenenblat, K., Transformations of manifolds and applications to differential equations. Addison Wesley Longman, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics # 93, 1998.