UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIV SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2020

OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI APLICADO A SISTEMAS FÍSICOS

João Carlos dos R. C. de Oliveira[1]; Carlos Alberto de Lima Ribeiro[2]

1. Bolsista FAPESB, Graduando em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: jcgenius19@gmail.com
2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: calr@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Defeitos Topológicos; Operador Laplace-Beltrami, Geometria Diferencial.

INTRODUÇÃO

A Teoria de Defeitos emerge da tentativa de explicar quebras de simetrias presentes na estrutura de um material ou meio. Justifica-se tal tentativa, tendo em vista que a presença dos defeitos modificam as propriedades do material e do meio, isto é, alteram propriedades eletrônicas, mecânicas e físicas (Ribeiro, 2001). O formalismo tradicional, ou seja, o tratamento matemático é por intermédio da Teoria da Elasticidade. Um método alternativo e bem sucedido ocorre no formalismo da Gravitação (Katanaev & Volovich, 1992). De fato, os defeitos são descritos mediante as seguintes equações:

$$b^i = - \oint_c dx^m \partial_m u^j(x) \tag{1}$$

$$\Omega^{ij} = \oint_c dx^m \partial_m \omega^{ij}(x), \quad \omega^{ij} \in SO(3) \tag{2}$$

Ademais, o objeto de nosso estudo é o operador Laplace-Beltrami. Definido por:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g_{ij} \partial_j) \tag{3}$$

Onde

$$g \equiv \det[g_{ij}] \tag{4}$$

Em que g é o valor do determinante do tensor métrico. Mediante o formalismo da gravitação e o uso do operador supracitado, desenvolver-se-á a análise.

METODOLOGIA

O método científico aplicado a Física consiste de modo simplificado na (1) elaboração de hipóteses, (2) modelagem matemática e (3) experimentação (Feynman, 1971). Tendo em vista que o trabalho é de natureza teórica, a pesquisa reduz-se as etapas (1) e (2). Ora, uma vez que se usará o operador Laplace-Beltrami para descrição da dinâmica de partículas na vizinhança do Defeito, o primeiro passo é identificar a métrica. Em seguida faz-se o uso do operador. Depois disso, usaremos novamente o operador na equação de Schrödinger Solucionando-a, ter-se-á as equações do movimento.

ANÁLISE

Para descrever a dinâmica física em um sólido ou meio que apresente um defeito topológico, inicia-se identificando a métrica para o meio. Ora, para desclinação a métrica é:

$$ds^2 = dr^2 + (\propto r)^2 d\theta^2 + dz^2 \tag{5}$$

Onde as seguintes condições são obedecidas: se $\alpha > 0$, a desclinação é negativa e há inserção de material; se $\alpha < 0$ a desclinação é positiva e há retirada de material, logo, α está associado a presença ou ausência da seção de espaço do meio .

Decorre imediatamente de eq.5 que o tensor métrico para o com desclinação é:

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Com efeito, determina-se o operador Laplace-Beltrami, aplicando sua definição. Em coordenadas cilíndricas, temos:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\alpha^2 r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7}$$

Determina-se o potencial usando o seguinte formalismo criado por (Linet, 1986) e por (Smith, 1990). A autoenergia para uma dada distribuição arbitrária de carga é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\iint P(\vec{x}'')G(\vec{x}',\vec{x}'')P(\vec{x}')d^3x'd^3x'' \tag{8}$$

Feitas algumas manipulações, ter-se-á que:

$$U = \frac{1}{2}q^2 G(\vec{x}',\vec{x}'') \tag{9}$$

Por seu turno, obtém-se a função de Green usando a equação de Poisson que descreve o potencial eletrostático de uma carga puntiforme:

$$\Delta\Phi(\vec{x}') = -4\pi\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}\quad) \tag{10}$$

Cuja solução é:

$$G(\vec{x}',\vec{x}'') = \frac{1}{2\pi r}\int_0^\infty \frac{P\coth(Px) - \coth(x)}{sen h\ (x)}dx \tag{11}$$

Por fins de simplicidade, definimos:

$$\mu(\rho) = 2\int_0^\infty \frac{P\coth(\rho x) - \coth(x)}{sen h\ (x)}dx \tag{12}$$

Dessa maneira, a expressão para autoenergia é:

$$U = \frac{1}{2} q^2 \mu(\rho) \tag{13}$$

O potencial é expresso, portanto, por:

$$U = \begin{cases} \frac{1}{2} q^2 \mu; & para\, r > r_0 \\ 0, & para\, r < r_0 \end{cases} \tag{14}$$

Finalmente, pode-se obter a autoforça sentida pela partícula, tendo em vista que:

$$\vec{\mathrm{F}} = -\vec{\nabla} U \tag{15}$$

Obtém-se:

$$\vec{\mathrm{F}} = \frac{q^2 \mu}{2r^2} \tag{16}$$

Uma vez que estamos interessados na descrição quântica para movimento nas imediações do defeito, resolveremos a equação de Schrödinger para nosso modelo (já conhecemos o Hamiltoniano do sistema). Como já ocorreu outrora, usa-se o operador Laplace-Beltrami, pois a métrica do espaço é não trivial.
Na região interna ($r<r_0$) o potencial é nulo, e tem-se:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi(r,\theta,z)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi(r,\theta,z)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi(r,\theta,z)}{\partial z^2} + \frac{2mE}{h^2}\psi(r,\theta,z) = 0 \tag{17}$$

Observando a simetria translacional e rotacional do problema, propõe a seguinte solução (a fim de usar o método de separação de variáveis):

$$\psi(r,\theta,z) = R(r)\exp[i(m\theta + kz)] \tag{18}$$

Fazem-se operações algébricas e chega-se a solução:

$$\psi^1(r,\theta,z) = A_m J_m(\gamma r)\exp[i(m\theta + kz)] \tag{19}$$

Essa é a solução da parte interna, o índice 1 indica que é uma parte da solução geral.
Para região externa precisaremos do operador Laplace-Beltrami, a métrica será a da corda cósmica:

$$ds^2 = P^2(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \tag{20}$$

Com efeito, a equação de Schrödinger fica:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{P}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi(r,\theta,z) + \frac{e^2\sigma(\rho)}{4\pi\epsilon r}\psi(r,\theta,z) = E\psi(r,\theta,z)$$

Novamente, utilizando o procedimento de separação de variáveis, temos:

$$\psi^2(r,\theta,z) = B_m r^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\beta r}{2} + i(l\theta + kz)\right] (\beta r)^{(l\theta+1/2)}\Omega\left(lp - \lambda + \frac{1}{2}, 12lp; \beta r\right) \tag{21}$$

Onde $\Omega\ (\alpha,\beta;\ \omega)$ é uma função hipergeométrica confluente.

Além disso, o projeto de pesquisa busca estudar um defeito topológico do tipo Deslocação Hélice. Esse tipo de defeito permite a quebra das ligações existente entre os átomos formadores do sólido.
A métrica desse defeito é dada por:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \left[dz + \frac{b}{2\pi} d\theta\right]^2 \tag{22}$$

Mediante procedimentos análogos aos feitos anteriormente, obtemos a função que descreve o comportamento de partículas nas imediações do Deslocamento em Hélice. A solução é uma combinação das funções de Bessel (J_l) e Neumann (N_l):

$$\psi(r, \theta, z) = \left[a_l J_{|l|}(kr) + \ b_l N_{|l|}(kr)\right] exp\left\{i\left[(l\theta + jz) - \ \int_0^\theta \nu d\theta'\ \right]\right\} \tag{23}$$

As informações devido ao defeito estão contidas dentro do fator de fase. De fato, estudando-se o espalhamento quântico para essa solução, nota-se que o defeito presente no sólido (p.ex. semicondutor) atua da mesma maneira que o potencial no efeito Aharonov-Bohm (Aharonov & Bohm, 1959).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho mostra a grande utilidade do uso do operador Laplace-Beltrami. De fato, em geometrias não euclidianas torna-se uma ferramenta essencial. Foi verificado também que a presença do Defeito Topológico certamente influenciará na dinâmica de partículas naquele meio. Além disso, foram obtidos resultados interessantes, a saber, o surgimento da autoforça sentida por partículas nas mediações do Defeito topológico, bem como, o comportamento semelhante aos observados a atuação do potencial no efeito Aharonov-Bohm.

REFERÊNCIAS

AHARONOV, Y., BOHM, D., *Significance of electromagnetic potential in the quantum theory*. Physical Review, v. 115, 4485, 1959.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B; SANDS, M. *The Feynman lectures on physics: Mainly mechanics, radiation and heat*. Bogotá: Fondo Educativo Interamericano, 1971. 3 v.

SMITH. A. G., *In proceedings of Symposiuum on The Formation and Evolution of Cosmic Strings*. Ed. G. W. Gibbons, S. W. Hawking and T. Vacaspati, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1990)

LINET. B., *Force on a charge in the space time of a cosmic string.* Physical Review D, v. 33, 1833 (1986)

RIBEIRO, C. A. de L., *Dinâmica de partículas na presença de defeitos topológicos.* Tese de Doutorado, UFPE, Recife-PE, 2001.

KATANAEV, M. O; VOLOVICH, I. V., Annals of physics (New York), v. 216, p.1, (1992)

WEINBERG, S. *Gravity and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity***,** ed. John Wiley and Sons, 1976