UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto n°17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXIV SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2020

Análise de Circuitos Elétricos Aplicando Diferentes Métodos Numéricos

Carlos Silva[1]; Marcos Paz[2]
1. Bolsista PIBIC/CNPq, Graduando em Engenharia de Computação, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: carlosluizbahia@gmail.com
2. Orientador, Departamento de Tecnologia, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: marcospaz@ecomp.uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: análise de circuitos, Integração Numérica, sistemas lineares.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo colaborar na construção de um programa simulador para análise de circuitos elétricos. Um circuito elétrico é basicamente composto por pelo menos uma fonte de tensão ou de corrente, alguns componentes elétricos básicos (resistor, indutor e capacitor) e condutores para interligar os diversos componentes do circuito. Quando o circuito está energizado uma corrente circula devido a uma diferença de potencial produzida pelas fontes existentes. Um simulador de circuitos deve conter processos numéricos sistemáticos para efetuar tal análise. O conhecimento da teoria de análise de circuitos elétricos e o domínio de técnicas numéricas aplicadas são fundamentais no desenvolvimento deste projeto.

Através da análise de circuitos podemos observar o comportamento das correntes e tensões em diferentes pontos ao longo do circuito. É possível realizar análise de circuitos de forma diferenciada entre análise em corrente contínua (CC), em corrente alternada (CA) e análise transitória. Os componentes do circuito podem estar interligados em série e/ou em paralelo fazendo surgir o conceito de nó, ramo e malha. Tais conceitos são importantes para análise de circuitos usando as Leis de Kirchhoff sendo conhecidas como lei das malhas e dos nós. A aplicação destas leis gera um conjunto de equações que determinam o comportamento do circuito, de forma que teremos uma quantidade $\boldsymbol{n}$ de incógnitas que se relacionam em $\boldsymbol{n}$ equações. Assim, teremos um sistema quadrático de equações do tipo $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Este é um sistema característico de equações lineares.

As técnicas numéricas aplicadas dependem muito do tipo de metodologia de análise escolhida. Para este projeto foi escolhido a análise nodal, por ser uma técnica mais adaptada aos métodos numéricos de solução de sistemas lineares.

A análise de circuitos pode ser feita no domínio do tempo ou da frequência, além disso é importante saber analisar um circuito tanto em regime estacionário, quanto em regime transiente sendo que, os componentes podem assumir diferentes comportamentos para cada regime. Neste trabalho nos atemos à análise no domínio do tempo e regime estacionário.

Métodos numéricos são técnicas matemáticas usadas na solução de problemas matemáticos que não podem ser resolvidos ou que são difíceis de serem resolvidos analiticamente (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009, pag. 21). Este é o caso de sistemas elétricos, que são bastante ramificados, possuem várias cargas e componentes integrados no sistema. Desta forma, apenas através de métodos numéricos é possível observar o comportamento do sistema como um todo.

O objetivo geral deste trabalho é testar diferentes métodos possíveis de serem aplicados na solução de circuitos elétricos, contribuindo na escolha da melhor estratégia a ser usada no Simulador de circuitos. A princípio, tínhamos em mente estudar a aplicação de diferentes métodos de solução de sistemas lineares e integração, sendo a implementação realizar em C++. Contudo, para avaliar o desempenho da solução numérica para diferentes métodos de integração é necessário já se ter o método de solução do sistema de equações já definido. Assim, o foco voltou-se para os métodos numéricos aplicados a solução de sistemas de equações lineares que são representados na forma matricial. Já que a formulação do problema é na forma matricial, foi necessária uma revisão de álgebra linear. Embora a linguagem objetivo seja C++, optamos por usar o ambiente Matlab para acelerar a revisão da álgebra linear e dos conceitos de circuitos, facilitando a implementação dos métodos e o ajuste ao problema de análise de circuitos.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

Considere o seguinte circuito elétrico cuja topologia está apresentada na figura abaixo:

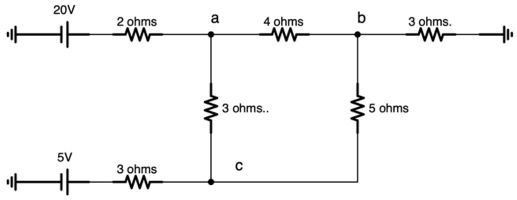

Figura 1: Circuito elétrico.

Este é um circuito conectado a três terminais com tensões conhecidas. Analisar um circuito é determinar as tensões em todos os nós interiores (***a***, ***b*** e ***c***). Para tanto, inicialmente nos referimos a um hipotético nó ***a*** que está conectado aos nós ***b***, ***c***, ..., ***k***:

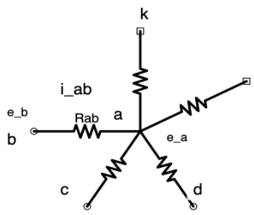

Figura 2: Nó a hipotético.

A corrente ***i*** do nó ***a*** para o nó ***b*** é denotada por i_{ab}, podemos escreve-la em termos das tensões de nó como segue:

$$i_{ab} = \frac{e_a - e_b}{R_{ab}} \tag{1}$$

Onde R_{ab} é o resistor entre os nós ***a*** e ***b***, e e_a e e_b são tensões de nó. Aplicando a lei de Kirchhoff para as correntes, temos que o total de correntes deixando o nó ***a*** deve ser zero:

$$\sum_{j=b,c,\dots,k} i_{aj} = 0 \tag{2}$$

Ou de forma equivalente, introduzindo a relação entre corrente e tensões eq. (1):

$$\sum_{j=b,c,\dots,k} \frac{e_a - e_j}{R_{aj}} = 0 \tag{3}$$

Essa relação é aplicada a cada nó de tensão desconhecida. Para o circuito mostrado na figura 1, três equações são escritas como

$$\begin{gathered}\frac{e_a-20}{2}+\frac{e_a-e_b}{4}+\frac{e_a-e_c}{3}=0\\ \frac{e_b-e_a}{4}+\frac{e_b-0}{3}+\frac{e_b-e_c}{5}=0\\ \frac{e_c-5}{3}+\frac{e_c-e_a}{3}+\frac{e_c-e_b}{5}=0\end{gathered}\tag{4}$$

Ou de equivalentemente:

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)e_a\ -\frac{1}{4}e_b\ -\frac{1}{3}e_c\ =\frac{20}{2}\\ -\frac{1}{4}e_a+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)e_b-\frac{1}{5}e_c=0\\ -\frac{1}{3}e_a-\frac{1}{5}e_b+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)e_c=\frac{5}{3}\end{gathered}\tag{5}$$

O sistema de equações para circuitos elétricos, como apresentado acima, pode ser expresso compactamente de forma matricial, como segue:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{4} & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_a\\ e_b\\ e_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{2}\\ 0\\ \frac{5}{3}\end{bmatrix}\tag{6}$$

Um estudo sobre álgebra linear é necessário para relembrar operações com vetores e matrizes. Observando a equação na forma matricial podemos notar um comportamento característico na matriz de coeficientes. Tal condição é um fator que pode ser explorado nos métodos de solução de sistemas.
O sistema de equações do circuito, está no formato matricial:

$$[A]\{x\}=\{b\}\tag{7}$$

Onde $\boldsymbol{a_{ij}}$ são coeficientes da matriz $\boldsymbol{A}$ do sistema, $\boldsymbol{x_i}$ são as variáveis de nó (tensões), e $\boldsymbol{b_i}$ são os termos do vetor independente para um sistema não-homogêneo.
A matriz $\boldsymbol{A}$ tem dimensão $n{\times}m$, ou seja, n equações e m incógnitas. Para que o sistema tenha solução, ou possa ter uma solução, o número de equações deve ser igual ao numero de incógnitas.
Para resolver numericamente este sistema testamos diferentes métodos diretos e indiretos. Entre os métodos diretos aplicamos o método da Eliminação de Gaus sem e com pivotamento, método de Gauss-Jordan, Decomposição LU. Entre os métodos indiretos utilizamos o método de Jacobi, o método de Gauss-Seidel, e o método de Sobre relaxação Sucessiva (SOR). Cada método tem suas características próprias, vantagens e desvantagens. O objetivo aqui foi de observar o comportamento de cada método levando em conta a característica peculiar de um circuito elétrico.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

O método de eliminação de Gauss consiste de duas fases: a fase de eliminação progressiva e a fase de substituição regressiva. Na fase de eliminação são efetuadas operações de linhas com o proposito de zerar os coeficientes abaixo da diagonal principal, tomando cuidado para que o elemento pivô não seja zero. Neste ponto a matriz de coeficientes foi transformada numa matriz triangular superior. Podemos determinar a variável $\boldsymbol{x_n}$ e substituí-la regressivamente para encontrar $\boldsymbol{x_{n-1}}$, e assim sucessivamente até $\boldsymbol{x_1}$. O tempo de execução é dominado pela fase de eliminação que demanda $(2/3)n^3$ flops. A medida que o sistema cresce o esforço computacional cresce consideravelmente.

O método de Gauss-Jordan diagonaliza a matriz de coeficientes, uma vez que zera todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal. É considerado um avanço para o método da eliminação de Gauss, pois além de poder ser usado para calcular o determinante da matriz $\boldsymbol{A}$, pode encontrar também a sua inversa se uma matriz identidade for incluída na matriz aumentada.
O método de decomposição LU, como o próprio nome diz, relaciona a matriz de coeficientes a duas matrizes triangulares (L matriz triangular inferior, U matriz triangular superior). Este método separa a fase de eliminação da mátria $\boldsymbol{A}$ da manipulação do lado direito $\{\boldsymbol{b}\}$. Assim, vetores múltiplos à direita podem ser calculados de maneira eficiente.
Os métodos iterativos fornecem uma alternativa aos métodos de eliminação. Assemelham-se às técnicas para obter raízes de equações. Utilizam abordagens similares para obter valores que satisfação a um conjunto de funções simultaneamente. Foram testados o método de Jacobi, Gauss-Seidel e SOR. Em cada ciclo do método de Jacobi a aproximação $x_i^{(k)}$ utiliza a aproximação anterior da variável $x_i^{(k-1)}$. O método de Gauss-Seidel é ligeiramente diferente, na medida em que aproveita as aproximações já obtidas na iteração atual para obter a aproximação do vetor de variáveis. O método de SOR aplica um peso ao calculo das aproximações. Os métodos iterativos são muito suscetíveis ao mal condicionamento do sistema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

Realizamos vários testes com os métodos numéricos aplicados à solução de sistemas lineares. Observamos que os métodos diretos podem apresentar problemas com acúmulo de erros de arredondamento nas suas operações. O método de Eliminação de Gauss com pivotamento parcial é ainda bastante utilizado em sistemas lineares, é direto e robusto, mas se empregado em sistemas de ordem elevada pode gerar problemas de alocação além dos erros de arredondamento. Os métodos que utilizam fatoração da matriz de coeficientes, como a decomposição LU, resolvem alguns problemas, mas ainda estão sujeitos aos erros de arredondamento. Já os métodos de aproximação são mais propensos ao mal condicionamento das matrizes dos sistemas.

REFERÊNCIAS

BOYLESTAD, R. L. 2004. Introdução a análise de circuitos elétricos – 10ed.: Pearson editora.

BURIAN JR., Y; LYRA, A.C.C. 2006. Circuitos elétricos – São Paulo: Pearson Prentice Hall.

ALEXANDER, C.K.; SADIKU, M.N. 2013. Fundamentos de Circuitos Elétricos – 5a Ed. McGrawHill.

ETTER, D.M. 1997. Engineering Problem Solving with Matlab – 2th Ed. Prentice Hall.

CHAPRA, S.C.; CANALE, S.P. 2011. Métodos numéricos para engenharia – 5. Ed. Porto Alegre: McGrawHill.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. 2009. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. [S.l.]: Bookman Editora.

CHAPMAN, S.J. 2016. Programação em Matlab para Engenheiros. 5ª Ed. Cengage Learning.

NAKAMURA, S. 2002. Numerical Analysis and Graphic Visualization with Matlab. 2th ed. Prentice Hall.

WATKINS, D.S. 2002. Fundamentals of Matrix Computations. 2th Ed. John Wiley.

Golub, G.H.; LOAN, C.F.V. 1996. Matrix Computations – 3th ed. Johns Hopkins.

PRESS, W.H; et all. 2007. Numerical Recipes the Art of Scientific Computing. 3th ed. Cambridge University Press.