UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXV SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2021

QUESTÕES MÉTRICAS EM UMA SUPERFÍCIE REGULAR

CRISTIANE PASCOAL DA SILVA [1] **e CLAUDIANO GOULART** [2]

[1]Bolsista PIBIC/FAPESB, Graduanda em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: cristianycris@live.com
[2]Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: cgoulart@uefs.br

PALAVRAS CHAVE: Curvas regulares; Superfícies regulares; Primeira forma fundamental.

INTRODUÇÃO

O trabalho tem como objetivo central o estudo detalhado de questões métricas em uma superfície regular, ou seja, o cálculo de comprimento de curvas em uma superfície, ângulos entre curvas que se interceptam e a área de uma região de uma superfície.

Para atingir esses objetivos, foi necessário a pesquisa de noções do cálculo de funções de duas variáveis, definições iniciais de topologia, curvas parametrizadas regulares, Fórmulas de Frenet, superfícies parametrizadas regulares, plano tangente e Primeira forma fundamental.

A compreensão desse tema é de fundamental importância para estudos posteriores sobre Transformações de Bäcklund e de Ribaucour, assim como outros tópicos da Geometria Diferencial.

MATERIAL E MÉTODOS

No presente estudo, os materiais utilizados foram livros do acervo da UEFS e adquiridos pela bolsista durante o período da vigência da bolsa, na qual a abordagem metodológica utilizada foi de cunho bibliográfico. As principais referências utilizadas nesse estudo foram Tenenblat [1] e Do Carmo [2].

Iniciamos os trabalhos com o estudo de pré-requesitos necessários para compreensão das definições, teoremas e propriedades presentes no capítulo zero do livro de Tenenblat [1]. Posteriormente, abordamos tópicos específicos da área de Geometria Diferencial.

A pesquisa foi realizada em dois momentos. No primeiro, foram realizados estudos individuais sobre tópicos selecionados pelo orientador. Em seguida, o assunto pesquisado era discutido através de reuniões semanais com o orientador, fazendo-se uso da plataforma Google Meet.

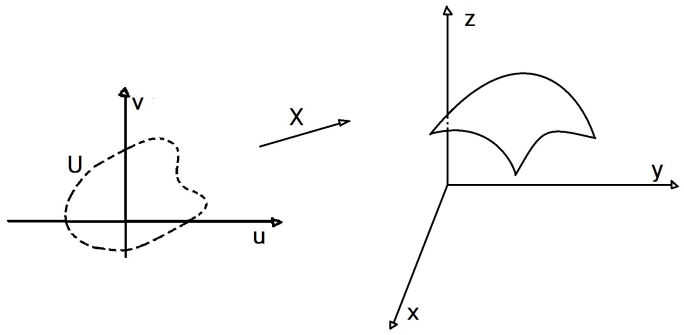
RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO

Nessa seção vamos apresentar os principais resultados estudados durante a vigência da bolsa de iniciação científica. Maiores detalhes podem ser encontrados em Tenenblat [1] e Do Carmo [2]. Primeiramente daremos a noção de superfície parametrizada regular.

Definição 1.1 Uma *superfície parametrizada regular* é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, tal que:

1. X é diferenciável de classe C^∞.
2. Para todo $q = (u, v) \in U$ a diferencial de X em q, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, é injetiva.

Figura 1: Superfície parametrizada regular



Fonte: Acervo dos autores

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de superfícies parametrizadas.

1. *Gráfico de uma Função*: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, uma função diferenciável, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$. A aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

é uma superfície parametrizada regular que descreve o gráfico de f.

2. *Superfície de rotação*: Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u)), \quad u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular tal que $f(u)$ não se anula. Então, a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$X(u, v) = (f(u)cos(v), f(u)sen(v), g(u))$$

onde $u \in I$ e $v \in \mathbb{R}$ é uma superfície parametrizada regular. A aplicação X é denominada uma *superfície de rotação da curva* α em torno do eixo OZ.

Definição 1.2 Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, dizemos que o vetor w de $\mathbb{R}^3$ é um *vetor tangente* a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

Definição 1.3 O *plano tangente* a X em $q = (u_0, v_0)$ denotado por T_qX é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em q.

De posse dessa teoria, podemos abordar a definição da *primeira forma quadrática*, principal tópico para o estudo de questões métricas de uma superfície.

Definição 1.4 Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, e seja q $\in U$. A aplicação

$$I_q : T_qX \to \mathbb{R}$$

$$w \to I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

é denominada a *primeira forma quadrática.*

Note que, se $w = X_u u' + X_v v'$ é um vetor de T_qX, então $I_q(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$ onde $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$ são denominados *coeficientes da primeira forma quadrática.*

As definições abaixo nos mostram como a teoria desenvolvida até este momento pode ser usada para tratar questões métricas de uma superfície.

Definição 1.5 Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superfície, então para $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt. \quad (I)$$

Definição 1.6 Se $\alpha(t)$ e $\beta(r)$ são curvas de $X(u, v)$ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u(r_0), v(r_0))$, então o ângulo θ com que $\alpha(t)$ e $\beta(r)$ se interceptam é dado por

$$cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(r_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)||\beta'(r_0)|} = \frac{I_q(\alpha'(t_0) + \beta'(r_0)) - I_q(\alpha'(t_0)) - I_q(\beta'(r_0))}{2\sqrt{I_q(\alpha'(t_0))I_q(\beta'(r_0))}}$$

Em particular, o ângulo entre as curvas coordenadas em (u_0, v_0) é dado por

$$cos(\theta) = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u||X_v|}(u_0, v_0) = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}$$

Por fim, veremos a definição da área de uma região da superfície regular.

Definição 1.7 Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ uma região de $\mathbb{R}^2$, tal que X restrita ao interior de D é injetiva. A área da região $X(D)$ é dada por

$$A(X(D)) = \int\int_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (II)$$

O exemplo a seguir ilustra os conceitos apresentados acima.

Exemplo 1.8 Considere a esfera unitária descrita por

$$X(u, v) = (sen(v)cos(u), sen(v)sen(u), cos(v)),$$

onde $u \in \mathbb{R}$, $0 < v < \pi$,

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t))$$

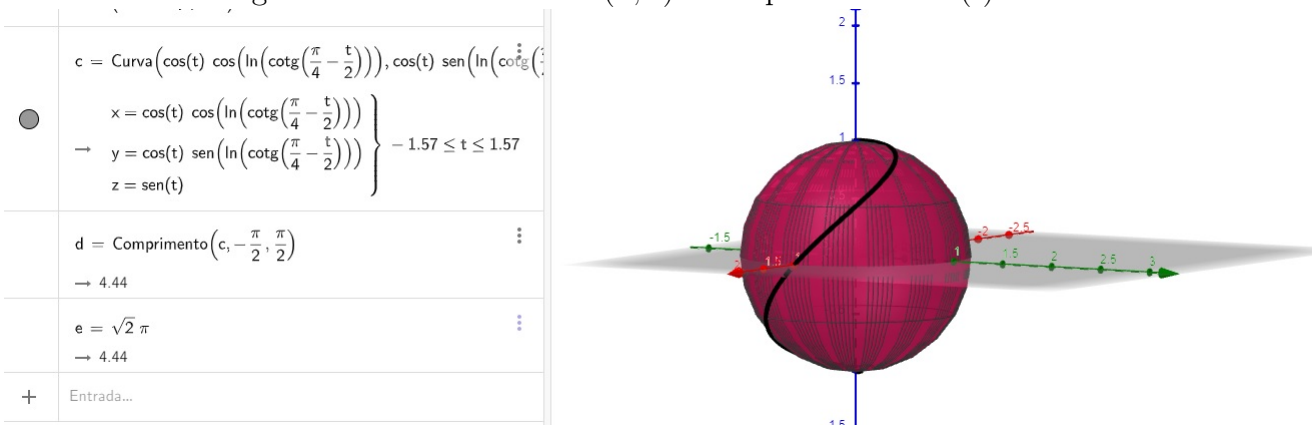
é uma curva da esfera, onde $u(t) = ln(cot(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}), v(t) = \frac{\pi}{2} - t$, $\frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Note que calculando os coeficientes E, F, G, derivando u e v com relação a t e substituindo em (I) vamos obter que o comprimento de $\alpha(t)$ de $\frac{-\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ é dado por

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{|\alpha'(t)|}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sen^2(\frac{\pi}{2} - t) \cdot \frac{1}{sen^2(\frac{\pi}{2} - t)} + 1 \cdot 1}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}dt = \sqrt{2}\pi.$$

Utilizamos o GeoGebra para a visualização gráfica da esfera unitária $X(u, v)$ e da curva $\alpha(t)$. Podemos perceber que o resultado encontrado acima é similar ao do GeoGebra.

Figura 2: Esfera unitária $X(u, v)$ e comprimento de $\alpha(t)$



Fonte: Acervo dos autores

Observemos também que o ângulo entre as curvas coordenadas de $X(u, v)$ são ortogonais pois $F(u_0, v_0) = 0$.

Exemplo 1.9 Vamos calcular a área da esfera de raio r dada por

$$X(u, v) = (rsen(v)cos(u), rsen(v)sen(u), rcos(v)),$$

onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq \pi$. Usando os coeficientes da primeira forma fundamental de X e substituindo em (II) temos que a área da esfera de raio r que é dada por

$$A(X(D)) = \int\int_D \sqrt{EG - F^2}dudv = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2sen^2(v) \cdot r^2}dudv = 4\pi r^2$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa contribuiu de forma bastante significativa na compreensão de teoremas e definições da Geometria Diferencial, realização esta, que não seria possível apenas nas disciplinas obrigatórias do curso de Licenciatura em Matemática e por consequência contribuirá para a formação acadêmica atual e um futuro mestrado nesta área.

REFERÊNCIAS

1. Tenenblat, K., **Introdução Geometria Diferencial**. 1ª ed. Brasília: Universidade de Brasília, 1990;

2. do Carmo, M. C., **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Tradução: Pedro Roitman. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.