UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Autorizada pelo Decreto Federal nº 77.496 de 27/04/76
Recredenciamento pelo Decreto nº17.228 de 25/11/2016
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXVI SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UEFS
SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - 2022

CURVATURAS DE UMA SUPERFÍCIE REGULAR

MATHEUS SILVA XAVIER[1] **e CLAUDIANO GOULART**[2]

[1]Bolsista PIBIC/FAPESB, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: matheussilvaxavier@yahoo.com

[2]Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: cgoulart@uefs.br

PALAVRAS CHAVE: Superfícies; Formas fundamentais; Curvaturas.

INTRODUÇÃO

O trabalho tem como objetivo central o estudo das curvaturas em superfícies regulares. Para atingir este objetivo, foi necessário a realização de uma revisão bibliográfica detalhada de conteúdos de Geometria Diferencial essenciais para a compreensão e estudo dos conceitos de curvatura, sendo esses: Superfícies Regulares, Superfícies Parametrizadas Regulares, Plano Tangente, Primeira Forma Fundamental, Segunda Forma Fundamental e Aplicação Normal de Gauss.

Através destes conceitos, estudamos diferentes tipos de curvaturas em superfícies, a exemplo da Curvatura Normal, Curvatura Gaussiana e Curvatura Média. Por fim, analisamos exemplos de superfícies Linear-Weingarten como as Superfícies Mínimas e superfícies de curvatura Gaussiana constante.

MATERIAL E MÉTODOS

Para a realização deste trabalho, os materiais utilizados foram livros do acervo da UEFS e adquiridos pelo bolsista durante o período da vigência da bolsa. A metodológia utilizada foi de revisão bibliográfica, tendo em vista que esta é uma pesquisa da área de Matemática. As principais referências utilizadas nesse estudo foram Tenenblat [1] e Do Carmo [2].

A pesquisa foi realizada em dois momentos: Primeiramente, eram feitos estudos individuais sobre tópicos selecionados pelo orientador. Em seguida, o assunto estudado era discutido através de reuniões semanais com o orientador, fazendo-se uso da plataforma Google Meet, principalmente durante o período em 2021, tendo em vista as restrições impostas pela pandemia de COVID-19. Posteriormente, os encontros semanais passaram a acontecer presencialmente na universidade.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO

Nessa seção vamos apresentar os principais resultados estudados durante a vigência da bolsa de iniciação científica. Maiores detalhes podem ser encontrados em Tenenblat [1] e Do Carmo [2]. Primeiramente daremos a definição de superfície regular.

Definição 1.1 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \longrightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

1. X é diferenciável.
2. X é um homeomorfismo.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Além disso, para o estudo das superfícies regulares em Geometria Diferencial, é essencial o conceito de vetor tangente, que definiremos logo abaixo:

Definição 1.2 Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S. Dizemos que o vetor w de $\mathbb{R}^3$ é um *vetor tangente* a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

O conjunto de vetores tangentes a superfície em um ponto constitui um plano. Definiremos este plano a seguir:

Definição 1.3 O *plano tangente* a S em p denotado por T_pS é o conjunto de todos os vetores tangentes a S em p.

De posse dessas definições, podemos abordar a definição da *primeira forma fundamental* que será importante para o cálculo das curvaturas das superfícies posteriormente.

Definição 1.4 Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, e seja p $\in S$. A aplicação $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

é chamada a *primeira forma fundamental* de S em p.

Além disso, dada uma parametrização $X(u, v)$ de S em um ponto p, podemos expressar a primeira forma fundamental I_p na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS da seguinte maneira:

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2,$$

onde $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$ são denominados os *coeficientes da primeira forma fundamental.*

É importante mencionar que o estudo das curvaturas se baseia fortemente na análise dos vetores normais as superfícies. Isso acontece devido ao fato de que a curvatura de uma superfície regular é - de maneira intuitiva - a velocidade com que os planos tangentes mudam de direção. Dito isso, vamos agora introduzir a *aplicação normal de Gauss.*

Definição 1.5 Uma superfície regular S é dita orientável se existe uma aplicação diferenciável $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que a cada $q \in S$ associa um vetor $N(q)$, normal unitário em q.

Definição 1.6 A aplicação $N : S \longrightarrow S^2$, acima definida, toma seus valores na esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e é chamada *aplicação normal de Gauss.*

Fixada uma parametrização, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ em $p \in S$, podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto $q \in X(U)$, pela seguinte regra:

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Com isso, através da diferencial da aplicação normal de Gauss, podemos apresentar a Segunda Forma Fundamental e então definir as curvaturas Gaussiana e Média:

Definição 1.7 A forma quadrática II_p, definida em T_pS por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle$, é chamada a *segunda forma fundamental de S em P.*

Definição 1.8 Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_pS \longrightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a *curvatura Gaussiana* K de S em p. O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a *curvatura média* H de S em p.

Agora, vamos aplicar o conceito de segunda forma fundamental para coordenadas locais. Seja $X(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma Superfície S, e seja $\alpha(t)$ uma curva parametrizada em S, com $\alpha(0) = p$. A expressão da Segunda Forma Fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$II_p(\alpha') = -\langle dN(\alpha'), \alpha'\rangle = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2$$

onde $\qquad e = -\langle N_u, X_u\rangle \qquad f = -\langle N_u, X_v\rangle \qquad g = -\langle N_v, X_v\rangle$

Através dos coeficientes da Primeira e da Segunda forma fundamental, podemos calcular as curvaturas Gaussiana e Média da seguinte forma:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \qquad H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Definição 1.9 Uma superfície regular orientável S é dita *Linear-Weingarten* se existe uma relação linear entre K e H, isto é, existem a, b e c são constantes reais não nulas tais que

$$aH + bK - c = 0$$

As Superfícies Mínimas (H = 0) e as superfícies de Curvatura Gaussiana constante são exemplos triviais de superfícies Linear-Weingarten.

Exemplo 1.10 A esfera unitária (Figura 1), localmente parametrizada por

$$X(u,v) = (sen(v)cos(u), sen(v)sen(u), cos(v));\ 0 < u < 2\pi,\ 0 < v < \pi.$$

A esfera unitária possui curvatura Gaussiana constante $K = 1$.

Exemplo 1.12 O Helicóide (Figura 2), localmente parametrizado por

$$X(u,v) = (vcos(u), vsen(u), u);\ 0 < u < \frac{7\pi}{2}, -8 < v < 8.$$

Possui curvatura média H $= 0$. Ou seja, é uma Superfície Mínima.

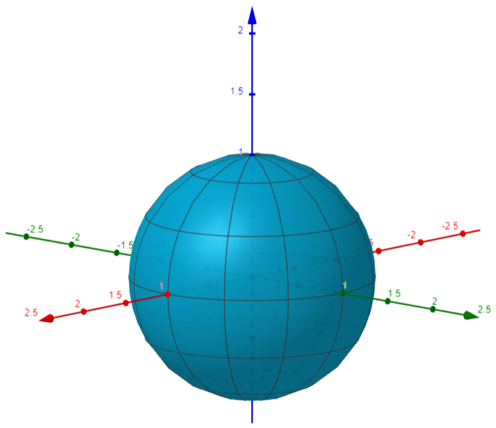

Figura 1: Esfera unitária
(Fonte: Acervo dos autores)

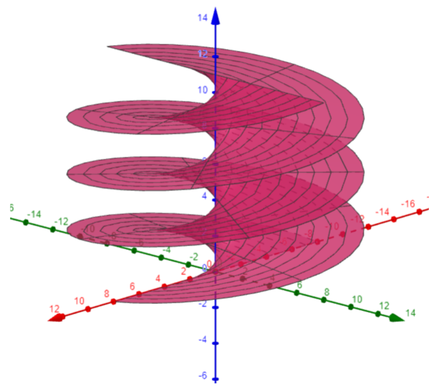

Figura 2: Helicóide
(Fonte: Acervo dos autores)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho de Iniciação Científica contribuiu para complementar a minha formação, tanto na parte da produção científica quanto na aprendizagem dos conteúdos de Geometria Diferencial e amadurecimento do tratamento da Matemática como um todo. Através do projeto, tive a oportunidade de aprender conteúdos que não constam nas disciplinas obrigatórias do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS, o que contribuirá para a minha formação em um futuro mestrado em Matemática. Além disso, obtive experiência para conseguir aprender conteúdos relacionados a outras áreas, o que terá grande importância no meu crescimento profissional.

REFERÊNCIAS

1. Tenenblat, K., **Introdução Geometria Diferencial**. 1ª ed. Brasília: Universidade de Brasília, 1990;

2. do Carmo, M. C., **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Tradução: Pedro Roitman. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

3. GUEDES, L.V. 2009. **Superfícies de Weingarten Lineares Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$**. Universidade Federal de Goiás, Dissertação de Mestrado.