# GRUPOS INFINITOS

**Saimon de Souza Rocha[1]; Kisnney Emiliano de Almeida[2].**

1. Bolsista PIBIC/FAPESB, Graduando em Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: saimonhp@gmail.com

2. Orientador, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: Kisnney@gmail.com

**PALAVRAS-CHAVE**: grupos infinitos; apresentações de grupos; grupo diedral infinito.

## INTRODUÇÃO

No curso de Licenciatura em Matemática da UEFS, muito pouco é estudado acerca de grupos infinitos, para os quais muitos conceitos e resultados associados a grupos finitos simplesmente não se aplicam. No entanto, há grande abundância de grupos infinitos tanto dentro da classe de grupos quanto em diferentes áreas da matemática. Uma iniciação científica dedicada à área permitiu compreender melhor não só os grupos como as diversas áreas da matemática que utilizam os mesmos para o seu próprio desenvolvimento. Além disso, devido à sua natureza basilar e riqueza na diversidade de exemplos, o estudo proporcionou grande desenvolvimento da maturidade matemática do aluno.

Existe vários grupos infinitos, e estudamos suas propriedades, a partir da visão da Teoria Combinatorial de Grupos, que consiste em estudar grupos a partir de suas apresentações, *i.e.*, seus geradores e relações, onde os geradores são elementos que podem ser usados para expressar os elementos de um grupo G através de aplicações sucessivas de sua operação, enquanto as relações são equações satisfeitas pelos geradores do grupo.  – em outras palavras, permite estudar grupos vistos com quocientes de grupos livres, onde grupos livres são certos grupos abstratos construídos a partir da aglutinação de letras de um dado alfabeto. Além disso, guiado pelo estudo desses grupos, o aluno estudou construções importantes da área que se aplicam aos mesmos.

A partir de um certo ponto, a pesquisa focou no grupo diedral infinito e no estudo de suas propriedades e subgrupos.

## METODOLOGIA

A pesquisa é de natureza teórica. O levantamento bibliográfico foi realizado, sendo selecionados livros e documentos essenciais para o entendimento dos conceitos, principalmente (COHEN, 1989) e (MEIER, 2008). Paralelo a isto, havia o aprofundamento de conceitos já estudados e consequentemente a solidificação do entendimento dos mesmos. Após o estudo da bibliografia, optamos por estudar propriedades de certos grupos infinitos, em especial o grupo diedral infinito, um grupo importante, porém pouco explorado na bibliografia, com o intuito de estabelecer aplicações para os resultados estudados e exercitar o pensamento científico do bolsista. Os resultados dos estudos dirigidos eram apresentados em forma de seminário e posteriormente discutidos com o orientador.

## RESULTADOS

A pesquisa trouxe a compreensão básica da teoria de grupos de maneira mais profunda que a obtida a partir das disciplinas de graduação. Os conceitos mais importantes que podemos citar são:

<u>- Construção do conceito de apresentações de grupos.</u>

Uma apresentação de um grupo G é construída a partir de um conjunto de geradores e um conjunto de relações de G, onde os geradores são elementos que podem ser usados para expressar os elementos do grupo através de aplicações sucessivas da operação do grupo, enquanto as relações são equações satisfeitas pelos geradores do grupo. A notação é a seguinte:

$$G = \langle X \mid R \rangle,$$

onde X é o conjunto de geradores e R o conjunto de relações. Por exemplo:

$$\mathbb{Z}_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$$

nos diz que o grupo pode ser descrito como tendo apenas um gerador, de ordem 3.

Analogamente, o grupo $S_3 = \{1, a, a^2, b, ba, ba^2\}$, grupo das simetrias de um triângulo, tem a seguinte apresentação:

$$S_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1, ab = ba^{-1} \rangle,$$

que nos diz que o mesmo pode ser descrito como tendo dois geradores, um de ordem 3 e outro de ordem 2, satisfazendo mais uma relação para de fato caracterizar o grupo $S_3$.

Podemos igualmente utilizar apresentações para descrever grupos infinitos. Como exemplo, podemos citar o grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ cuja apresentação é dada por:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid b^2 = 1, ab = ba \rangle.$$

Formalmente, dizer que o grupo G possui a apresentação $G = \langle X \mid R \rangle$, significa dizer que G é quociente do grupo livre F com base X, cujo núcleo da projeção do quociente é o fecho normal de R em F.

Como aplicação para o estudo da teoria, investigamos várias propriedades de alguns grupos, em especial grupos infinitos. Após este estágio, optamos por focar em um grupo específico que não é muito explorado na bibliografia: o grupo diedral infinito.

<u>- Grupo diedral infinito.</u>

O grupo diedral infinito é o grupo cuja apresentação é dada por:

$$D_\infty = \langle a, b \mid b^2 = 1, ab = ba^{-1} \rangle.$$

Apesar de ser um grupo importante para a teoria de grupos, é um grupo pouco explorado na bibliografia. Dessa forma, utilizamos a teoria estudada para verificar várias propriedades desse grupo, com dificuldade variável. Seguem abaixo algumas dessas propriedades:

- A ordem de $a$ é infinita;
- Todo elemento do $D_\infty$; pode ser escrito de maneira única como $a^r b^s$, onde r $\in \mathbb{Z}$ e s $\in$ $\{0,1\}$;
- $D_\infty$ não é abeliano;
- O conjunto de elementos de ordem finita de $D_\infty$ não é um subgrupo;
- Todo grupo diedral finito é quociente do $D_\infty$;
- O grupo $D_\infty$ é isomorfo ao produto livre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$;
- O grupo $D_\infty$ possui uma interpretação geométrica como grupo de translações de segmentos de uma reta.

Por fim, descrevemos todos os subgrupos de $D_\infty$, enunciados no teorema abaixo;

Teorema: Todos os subgrupos de $D_\infty$; se adequam a um dos seguintes tipos:

1. O grupo trivial {e};
2. O grupo $D_\infty$;
3. Os subgrupos $C_r$, gerado por $a^r$,para cada r $\geq 1$.
4. Os subgrupos $R_s = \{1, a^s b\}$ para cada s > 0;
5. Os subgrupos $D_{r,s} = C_r \cup C_r a^s b$, para r $\in \mathbb{Z}$ e s $\in \{0,1\}$.

A ideia da demonstração se baseia em considerar um subgrupo H de $D_\infty$ e mostrar que H se adequa a um dos cinco tipos do enunciado, a partir dos mínimos (quando existem) de dois conjuntos:

$$A_{H} = \{ n > 0 \mid a^n \in H\} \text{ e } B_{H} = \{ n \geq 0 \mid a^n b \in H\}$$

Pretendemos verificar quais desses subgrupos são normais. Conforme as perguntas vão sendo respondidas, outras dúvidas e questionamentos surgem e, assim, a pesquisa vai obtendo seus resultados.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa trouxe a compreensão básica da teoria de grupos de maneira mais profunda que a obtida a partir das disciplinas de graduação Além disso, fizemos o estudo de apresentações de grupos, importantes para a compreensão de conceitos mais complexos de teoria de grupos e o estudo do grupo diedral infinito. A iniciação científica, desta forma, está permitindo o desenvolvimento do pensar cientificamente por meio dos problemas propostos pela pesquisa, além de contribuir para que o bolsista se familiarize com a linguagem utilizada na pesquisa em matemática. Sendo assim, a pesquisa vem atingindo os seus objetivos progressivamente, o que nos estimula a continuar a produzir o conhecimento e dessa maneira poder agregá-lo a carreira acadêmica de forma efetiva.

**REFERÊNCIAS**


**CHANDLER, B.; MAGNUS, W.** ***The History of Combinatorial Group Theory: a case study in the History of Ideas*. Springer-Verlag, 1982**

**COHEN, Daniel E.** ***Combinatorial Group Theory: a topological approach*, Cambridge: Cambridge University Press, 1989.**

DOMINGUES, Hygino H**. *Álgebra Moderna*,** São Paulo: Atual, 1982.

**GARCIA, Arnaldo. *Elementos de Álgebra*, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.**

GONÇALVES, Adilson**. *Introdução à álgebra*,** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MEIER, John. ***Groups, Graphs and Trees: An Introduction to the Geometry of Infinite Groups***. Cambridge University Press, 2008.

OLIVERIA, W. ***Grupos Livres: Construção e Propriedades***. 2014. 28 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2014.

SILVA, Pedro V**., Teoria Geométrica de Grupos.** Disponível em http: //www.veraomat.ufba.br/Verao_UFBA/Cursos_files/grupos1.pdf.