

PRÉ-FRACTAIS NO ENSINO DE ELETRICIDADE: A “ESCADA DO DIABO” DE UMA ASSOCIAÇÃO DE CAPACITORES.

Flaviano Dias da Luz¹; José Carlos Oliveira de Jesus²; Álvaro Santos Alves³

1. Bolsista PIBIC/CNPq, Graduando em Nome do Curso, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: flavianodiasdaluz@yahoo.com.br

2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: aprendizfaced@gmail.com

3. Coordenador do Projeto Física no Campus, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, e-mail: asa@uefs.br

PALAVRAS-CHAVE: Poeira de Cantor; Capacitores; Escada do Diabo.

INTRODUÇÃO

A poeira de Cantor é um dos fractais mais simples e um dos mais citados na literatura, pois exibe de forma direta a que não tem uma escala característica (Gleria, Matsushita, Silva, 2004.) Esforços de introdução de fractais no ensino médio (Jesus, Pinto, Alves, Zebende, 2005; Sallum, 2005) e no ensino superior têm resultado em contribuições didáticas significativas (Assis et al, 2008; Backes e Bruno, 2005). Neste trabalho, exploramos as propriedades dos pré-fractais de Cantor para estudar arranjos de capacitores.

METODOLOGIA

A análise de redes de capacitores realizada neste trabalho começa com uma releitura da Poeira de Cantor, associando-a a um conjunto de capacitores de placas paralelas, ligados em série, de acordo com a ordem da geração pré-fractal correspondente.

Para tanto, considere um capacitor de placas de área A , paralelas, separadas por uma distância d , tal que $d \ll \sqrt{A}$. Nesse caso, sua capacitância pode ser expressa com boa aproximação por $C = \frac{\epsilon A}{d}$, onde ϵ representa a permissividade elétrica do meio material que preenche o capacitor (Reitz, Milford, Christy, 1982, p.126-128). Para o vácuo, a permissividade elétrica é dada por $\epsilon = \epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$, em unidades MKS (idem, p.38).

Para estabelecer uma relação entre a Poeira de Cantor e os capacitores, considere o esquema da Figura 1, na qual as linhas verticais representam as placas paralelas que formam o capacitor, dispostas perpendicularmente ao plano da página. Na parte superior da Figura, encontra-se o gerador da Poeira de Cantor, o segmento de reta de comprimento d (FEDER, 1988). Os pré-fractais são obtidos desse segmento a partir da seguinte regra de recursividade: divide-se o segmento em três partes iguais e retira-se daí a parte central, obtendo-se a 1ª geração pré-fractal, formada por 2 segmentos de comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)d$, ou seja, $1/3$ do comprimento original. Com isso, pode-se agora formar dois capacitores: um deles com as placas posicionadas em $x_1 = 0$ e $x_2 = \left(\frac{1}{3}\right)d$; o outro com as placas em $x_3 = \left(\frac{2}{3}\right)d$ e $x_4 = d$.

Para obter a 2ª geração, faz-se o mesmo procedimento para os segmentos remanescentes da geração anterior: agora, obtém-se 4 segmentos com $(1/9)$ do comprimento original, que dão origem a 4 capacitores cujas placas localizam-se entre os pontos: $x_1 = 0$ e $x_2 = \left(\frac{1}{9}\right)d$; $x_3 = \left(\frac{2}{9}\right)d$ e $x_4 = \left(\frac{3}{9}\right)d$; $x_5 = \left(\frac{6}{9}\right)d$ e $x_6 = \left(\frac{7}{9}\right)d$; $x_7 = \left(\frac{8}{9}\right)d$ e $x_8 = d$. Os capacitores assim formados são ligados em série, através dos segmentos $\overline{x_2x_3}$, $\overline{x_4x_5}$ e $\overline{x_6x_7}$, conforme a

Figura 1. Usa-se o mesmo procedimento para cada uma das gerações.

Para a 3ª geração pré-fractal, repete-se a regra a cada um dos 4 segmentos remanescentes, obtendo-se agora 8 segmentos com $(1/27)$ do comprimento original, preenchidos em azul na

Figura 1, indicando o meio dielétrico de permissividade ϵ . Aplicando-se essa regra recursivamente, obtém-se para a n-ésima geração um total de 2^n segmentos, cada um com $(1/3)^n$ do comprimento original.

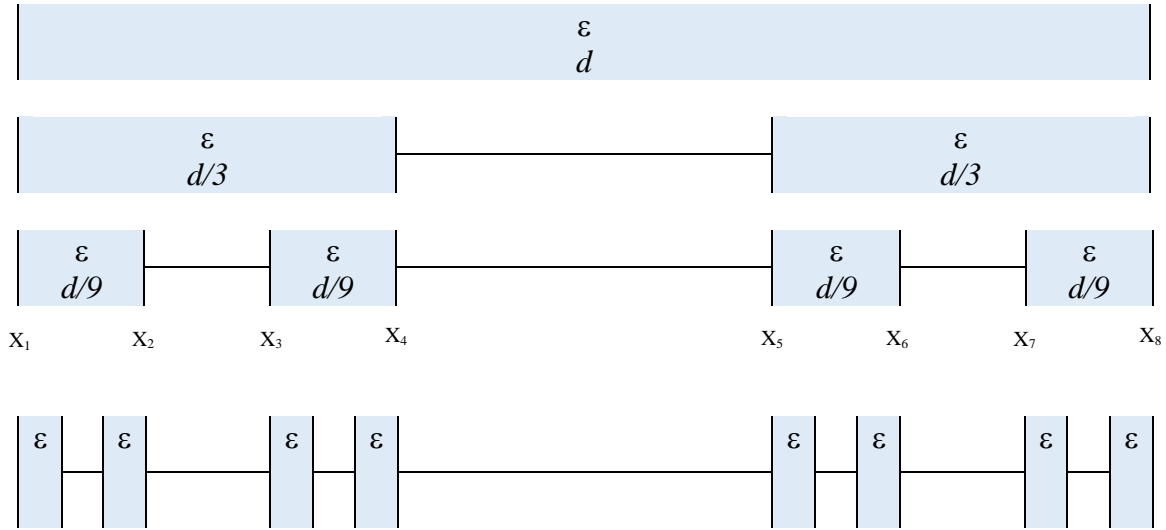


Figura 1. Três primeiras gerações pré-fractais da Poeira de Cantor e os correspondentes capacitores, preenchidos com material de permissividade elétrica ϵ . Elimina-se o terço central e conecta-se os capacitores em série, produzindo uma competição entre o aumento da capacitância devido à diminuição da distância entre as pastas e a diminuição da capacitância devido à ligação em série dos capacitores para cada geração.

Assim, para cada geração há um total de 2^n capacitores, cada um com uma capacitância dada por: $c_n = \frac{\epsilon A}{d_n}$, (3)

onde $d_n = d \left(\frac{1}{3}\right)^n$. (4)

Portanto, a cada geração há um aumento da capacitância individual c_n , devido à diminuição da distância interplanar. Como esses capacitores estão ligados em série, a capacitância total da n-ésima geração será dada por

$$\frac{1}{C_n} = \underbrace{\frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_n} + \dots + \frac{1}{c_n}}_{2^n \text{ vezes}} \quad (5)$$

Logo, combinando-se as Eqs. (3) e (5), a capacitância total para a n-ésima geração pode ser escrita explicitamente na forma: $\frac{1}{C_n} = \frac{1}{c_n} 2^n$, donde $C_n = \frac{c_n}{2^n} = \frac{\epsilon A}{2^n d_n}$. (6)

A substituição da Eq. (4) na Eq. (6) fornece: $C_n = \frac{\epsilon A}{2^n d_n} = \frac{\epsilon A}{2^n \frac{d}{3^n}} = \frac{\epsilon A}{d \left(\frac{2}{3}\right)^n}$ (7)

Como a capacitância da geração de ordem zero é dada por $C_0 = \frac{\epsilon A}{d}$, tem-se, pois, que

$$C_n = C_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (8)$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Eq. (7) é fundamental para a compreensão desse trabalho, pois a partir dela é possível estabelecer uma relação entre a o arranjo de capacitores e a dimensão fractal da Poeira de Cantor. A partir de Feder (1988), é possível mostrar que o fator de escala fractal para a n-ésima geração da poeira de Cantor tem a forma $d_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n d$. (9)

Com isso, o comprimento total de uma geração em função do fator de escala é dada por:

$$L(d_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n d \quad (10)$$

Combinando-se essas duas expressões acima, pode-se mostrar que:

$$L(d_n) = d \exp \left\{ \ln \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \right\} = d^{\ln 2 / \ln 3} d_n^{1 - (\ln 2 / \ln 3)} \quad (11)$$

$$\text{Essa expressão pode ser resumida na forma: } L(d_n) = K d_n^{1-D} \quad (12)$$

onde o fator $K = d^{\ln 2 / \ln 3}$ é uma constante que depende da distância inicial entre as placas do capacitor (geração 0) e $D = \ln 2 / \ln 3$ é a dimensão fractal da Poeira de Cantor. Por fim, comparando-se as Eqs. (7), (10) e (12), obtém-se:

$$C_n = \frac{\varepsilon A}{d \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\varepsilon A}{L(d_n)} = \frac{\varepsilon A}{K d_n^{1-D}} = \frac{\varepsilon A}{K} d_n^{D-1} \quad (13)$$

O resultado acima (Eq. 13) significa que a capacitância total de cada geração cresce com o fator de escala da Poeira de Cantor na forma assintótica: $C_n \sim d_n^{D-1}$.

Portanto, fica estabelecida a relação entre os arranjos de capacitores, a escala de medida e a dimensão fractal da Poeira de Cantor.

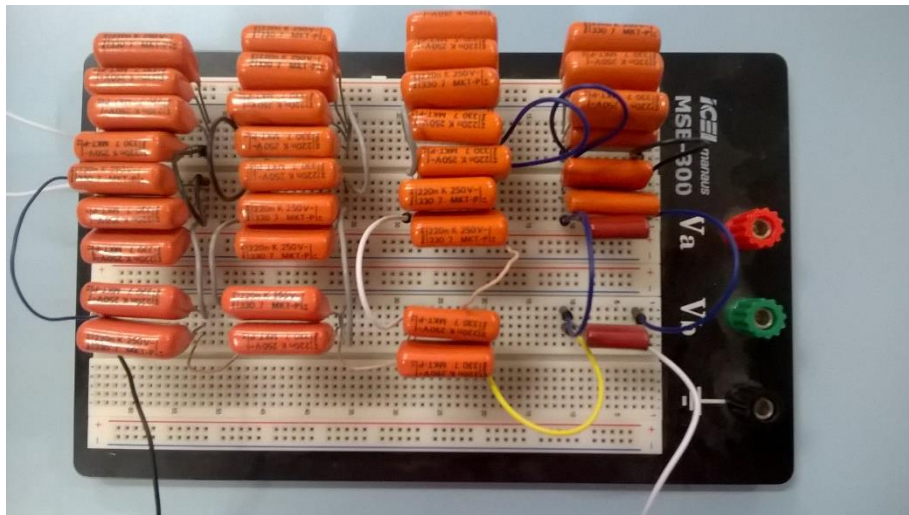


Figura 2. Montagem da segunda geração pré-fractal de Cantor em uma rede de capacitores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Encontramos uma relação analítica entre a capacitância e a dimensão fractal para uma sequência pré-fractal da Poeira de Cantor. A Figura 2 representa o arranjo correspondente à segunda geração de tal sequência. Cada fileira de capacitores representa o capacitor equivalente da Figura 1 para essa geração. As medidas são feitas com um capacitômetro comercial. Resultados preliminares exibem uma concordância qualitativa com a Eq. 13.

REFERÊNCIAS

ASSIS, T. A. de; MIRANDA, J. G. V.; MOTA, F. de B.; CASTILHO, C. M. C. de. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.30, n.2, p.2304, 2008.

BACKES, André Ricardo; BRUNO, Odemir Martinez. Técnicas de Estimativa da Dimensão Fractal: Um Estudo Comparativo. *INFOCOMP Journal of Computer Science* 4 (3), 50-58, 2005.

- FEDER, Jens. *Fractals*. (Physics of solids and liquids). New York: Plenum Press, 1988.
- GLERIA, Iram; MATSUSHITA, Raul; SILVA, Sergio da. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.26, n.2, p.99-108, 2004.
- JESUS, José Carlos Oliveira de; PINTO, Gleidson de Oliveira; ALVES, Álvaro Santos; ZEBENDE, Gilney Figueira. Fractais na escola: poeira de Cantor e resisitores. In: Atas do XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física, Rio de Janeiro, 2005.
- KON, Fabio. BOUDLER, John I. Música, computadores e fractais. In: IV Congresso de Iniciação Científica da UNESP, ago., 1992.
- REDONDO, Djalma M.; LÍBERO, V. L. Conceitos básicos sobre capacitores e indutores. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 18, n.2, p.137-142, jun., 1996.
- REITZ, J.; MILFORD, F.; CHRISTY, R. Fundamentos da teoria eletromagnética. Rio de Janeiro : Campus, 1982.
- SALLUM, Élvia Mureb. Fractais no ensino médio. *Revista do Professor de Matemática*, 57, p.1-8, 2005.