

MANOBRAS EVASIVAS ÓTIMAS COM MODELO LINEAR DE MASSA

Lucas dos Santos Ferreira¹; Antônio Delson C. de Jesus²

1. Bolsista FAPESB-UEFS, Graduando em Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, email: lsfferreira@live.com
2. Orientador, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, email: ald1j1@gmail.com

PALAVRAS-CHAVE: Manobra Evasiva, Otimização, Modelo Linear.

INTRODUÇÃO

As missões espaciais atendem a diversos interesses científicos, operacionais e científicos. Os custos associados a eles são elevados, particularmente, os relacionados ao consumo de combustível. É sempre desejável projetos de missões que incorporem a otimização deste consumo. Na realidade, uma missão espacial ótima é aquela cujo consumo de combustível é minimizado e a carga útil é maximizada. Para introduzirmos a exigência de consumo mínimo num sistema de corpos sujeitos ao campo gravitacional, utilizamos o Princípio de Mínimo de Pontryagin. Este princípio garante a existência de grandezas do sistema através das quais a exigência de otimização seja alcançada ao longo do processo da dinâmica. Nesse trabalho, as equações da dinâmica relativa com modelos de massa linear e de massa exponencial, juntamente com as condições para a obtenção de um controle de otimização, satisfazem a:

$$\frac{x^*}{dt} = H_{\lambda}^T \quad (1)$$

$$\frac{\lambda^*}{dt} = H_x^T \quad (2)$$

$$H_u = 0 \quad (3)$$

onde H é a função Hamiltoniana do sistema definida por:

$$H(x^*, \lambda^*, u^*) = -L(x^*, u^*) + \lambda^{*T} f(x^*, u^*) \quad (4)$$

Através destas condições, as variáveis de controle que minimizam o gasto de combustível são encontradas e, assim, a missão tornar-se mais viável economicamente.

Além desta investigação, estudamos também as manobras evasivas de um veículo operacional em ambiente de detritos espaciais. Este estudo é de grande importância para aplicações às missões espaciais modernas. Neste estudo, consideramos os objetos espaciais envolvidos (veículo e nuvem de detritos) sujeitos apenas à força gravitacional da terra. Para esta condição, a dinâmica relativa é dada pelas equações:

$$y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} - 3y_0 \right) \cos(\omega t) - \frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 4y_0 \quad (5)$$

$$x(t) = -\frac{2\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t + \left(\frac{4\dot{x}_0}{\omega} + 6y_0 \right) \text{sen} \omega t - (3\dot{x}_0 + 6\omega y_0)t + \frac{2\dot{y}_0}{\omega} + x_0 \quad (6)$$

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{z_0}{\omega} \text{sen} \omega t \quad (7)$$

Estas Equações foram obtidos por Clohessy-Witshire em 1960 e regem a dinâmica relativa entre dois objetos sujeitos apenas à força gravitacionais.

MATERIAL E MÉTODOS OU METODOLOGIA (ou equivalente)

A metodologia aplicada ao estudo das manobras evasivas ótimas foi basicamente a dedução das equações da dinâmica relativa entre os corpos envolvidos, considerando as forças gravitacionais e do propulsor linear (Jesus et al, 2012). Logo após, a simulação numérica da dinâmica encontramos as condições de otimização na dinâmica colisional. Com respeito ao problema de manobras evasivas em ambiente de detritos, resolvemos as equações da dinâmica relativa para todos os pares possíveis dos n- detritos e simulamos os resultados numericamente. Os equipamentos necessários foram computadores para simulação numérica, livros didáticos e específicos da área de Dinâmica Orbital, softwares específicos para uso do tratamento dos dados obtidos.

RESULTADOS E/OU DISCUSSÃO (ou Análise e discussão dos resultados)

A determinação da função para o controle ótimo sem restrições, foi feita considerando a solução para o modelo de dinâmica relativa com sistema de massa linear e partindo das condições para um controle ótimo (3) sendo obtida a expressão para o controle:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u(t)} = & -1 + \lambda_1(t) \left\{ 2\omega \{A1 \sin(\omega t)\} \left\{ \frac{2v_x}{\omega} \left\{ \frac{t}{M_0 + u(t)t} + [C \text{sen}(A)B1 + \cos(A)C1 + C \cos(A)D1 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \text{sen}(A)E1 \right\} \right\} + \frac{v_y}{\omega} \{C \text{sen}(A)D1 + \cos(A)E1 - C \cos(A)B1 + \text{sen}(A)I1\} - \frac{v_x}{M_0 + u(t)t} \right\} \\
& + [2\omega \lambda_2(t) + \lambda_3(t)] \left\{ \omega A1 \cos(\omega t) \right. \\
& + \frac{2v_x}{\omega} \left\{ \frac{M_0}{(M_0 + u(t)t)^2} + [\omega C \cos(A)B1 - \omega \text{sen}(A)C1 + C \text{sen}(A)M1 + \cos(A)N1 \right. \\
& - \omega C \text{sen}(A)D1 - \omega \cos(A)E1 - C \cos(A)Q1 - \text{sen}(A)R1 \left. \right\} \\
& + \frac{v_y}{\omega} \{ \omega C \cos(A)D1 - \text{sen}(A)E1 - C \text{sen}(A)Q1 + \cos(A)R1 + \omega C \text{sen}(A)B1 + \omega \cos(A)C1 \\
& \left. - C \cos(A)M1 + \text{sen}(A)N1 \right\} \left. \right\} \\
& + \frac{M_0}{(M_0 + u(t)t)^2} [-v_x \lambda_{2(t)} - v_y \lambda_{4(t)} - v_z \lambda_{6(t)}] \\
& - \omega^2 \lambda_{4(t)} \left\{ \frac{-1}{\omega^2} \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(-1)^{k+1} \omega^{2k} M_0^{2k-1}}{2k! u(t)^{2k}} E2 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \omega^{2k} M_0^{2k-1}}{2k! u(t)^{2k-1}} F2 \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} M_0^{2k-2}}{(2k-1)! u(t)^{2k-1}} G2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1} M_0^{2k-2}}{(2k-1)! u(t)^{2k-2}} H2 + \frac{1}{M_0} I2 + \frac{u(t)}{M_0} J2 \right\} \sin(\omega t) \\
& + \left\{ \frac{2v_x}{\omega} \left\{ \frac{t}{M_0 + u(t)t} + [C \text{sen}(A)B1 + \cos(A)C1 + C \cos(A)D1 + \text{sen}(A)E1] \right\} \right. \\
& \left. + \frac{v_y}{\omega} \{C \text{sen}(A)D1 + \cos(A)E1 - C \cos(A)B1 + \text{sen}(A)I1\} \right\} + \frac{\lambda_{4(t)} \omega v_x t}{(M_0 + u(t)t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{5(t)} \left\{ \omega \left[-\frac{v_z}{\omega^2 M_0} [\cos(B)T2 + \sin(B)B3] - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{v_z u(t)}{\omega^2 M_0} [C \sin(B)T2 - \cos(B)A3 - (C \cos(B)B3) - \sin(B)C3] \right] \cos(\omega t) + \frac{v_y}{\omega} \{ C \cos(A)D1 - \omega \sin(A)E1 - \right. \\
& \left. C \sin(A)Q1 + \cos(A)R1 + \omega C \sin(A)B1 + \omega \cos(A)C1 - C \cos(A)R2 + \sin(A)N1 \} \right\} - \\
& \omega^2 \lambda_{6(t)} \left\{ -\frac{v_z}{\omega^2 M_0} [\cos(B)T2 + \sin(B)B3] - \right. \\
& \left. \frac{v_z u(t)}{\omega^2 M_0} [C \sin(B)T2 - \cos(B)A3 - (C \cos(B)B3) - \sin(B)A3] \right\} \sin(\omega t) + \frac{v_z}{\omega} \{ C \sin(A)D1 + \omega \cos(A)E1 - \\
& C \cos(A)B1 + \sin(A)C1 \} + \lambda_{7(t)} \quad (8)
\end{aligned}$$

Sendo as constantes de Ai, Bi, Ci, Di, Mi, Ni, Qi, Ri, com i=1,2 e 3, funções de f, onde:

$$\begin{aligned}
f = f(r_0, \dot{r}_0, M_0^{2k}, M_0^{2k-1}, \omega^{2k}, \omega^{2k-1}, v_{e_x}, v_{e_y}, v_{e_z}, (M_0 + \dot{m}t)^{2k}, (M_0 \\
+ \dot{m}t)^{2k-1}, \ln\left(\frac{M_0}{M_0 + u(t)t}\right), \text{sen}\left(\frac{\omega(M_0 + u(t)t)}{u(t)}\right), \cos\left(\frac{\omega(M_0 + u(t)t)}{u(t)}\right), u(t))
\end{aligned}$$

Posteriormente foram aplicadas as condições para a otimização sobre as equações relativas ao modelo de massa exponencial. Após os devidos cálculos resultou na expressão de controle:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta H}{\delta u(t)} = \lambda_{1(t)}^* \left\{ \frac{v_{e_x} t e^{-u(t)t}}{(\chi + e^{-u(t)t})} + 2\omega \left\{ A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} (C + D) \right\} \right\} + [2\omega \lambda_{2(t)} + \lambda_{3(t)}] \left\{ -\omega \sin(\omega t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} E \right] + \right. \\
\omega \cos(\omega t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} F \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \gamma}{n\chi^n} [G + H] \left. \right\} - \frac{\chi t e^{-u(t)t}}{(\chi + e^{-u(t)t})^2} [-v_{e_x} \lambda_{2(t)} - v_{e_y} \lambda_{4(t)} - v_{e_z} \lambda_{6(t)}] - \lambda_{4(t)} \omega^2 \left\{ \cos(\omega t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} I \right] + \right. \\
\sin(\omega t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} J \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} (L + M) \left. \right\} + \frac{2\omega \lambda_{4(t)} v_{e_x} e^{-u(t)t}}{(\chi + e^{-u(t)t})} \lambda_{5(t)} \left\{ -\omega \sin(\omega t) \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2 \chi^n} N \right] + \omega \cos(\omega t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\omega \chi^n} O \right] - \right. \\
\left. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2 \chi^n} v_{e_z} P \right\} - \omega^2 \lambda_{6(t)} \left\{ \cos(\omega t) \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2 \chi^n} Q \right] + \sin(\omega t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\omega \chi^n} R \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2 \chi^n} v_{e_z} S \right\} + \lambda_{7(t)} \quad (9)
\end{aligned}$$

Sendo as constantes de A à S funções de f, onde:

$$f = f[\omega, \chi, v_{e_x}, v_{e_y}, v_{e_z}, u(t), \exp(-u(t)nt), t]$$

A dinâmica para a nuvem foi desenvolvida sobre a mesma base de equações do sistema para a interação de dois corpos. Sendo assim, após os estudos foram obtidos como resultados:

$$\text{A expressão para a quantidade de interações da nuvem : } n_{p,2} = \frac{p!}{2!(p-2)!} \quad (20)$$

Onde n é o numero de combinações entre os detritos e p é o número de detritos que compõem a nuvem. E as equações da dinâmica relativa entre dois detritos i e j

$$x_0 = r_0 [\cos(\alpha_j) \sin(\beta_j) - \cos(\alpha_i) \sin(\beta_i)] \quad (21)$$

$$y_0 = r_0 [\sin(\alpha_j) \sin(\beta_j) - \sin(\alpha_i) \sin(\beta_i)] \quad (22)$$

$$z_0 = r_0 [\cos(\beta_j) - \cos(\beta_i)] \quad (23)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_{0(j)} - \dot{x}_{0(i)} \quad (23)$$

$$\dot{y}_0 = \dot{y}_{0(j)} - \dot{y}_{0(i)} \quad (24)$$

$$\dot{z}_0 = \dot{z}_{0(j)} - \dot{z}_{0(i)} \quad (25)$$

Onde os ângulos α e β representam os ângulos esféricos que determinam as posições iniciais dos detritos que compõem a nuvem. Os gráficos da Figura 1 exemplificam a distância relativa entre os detritos em uma das nuvens simuladas:

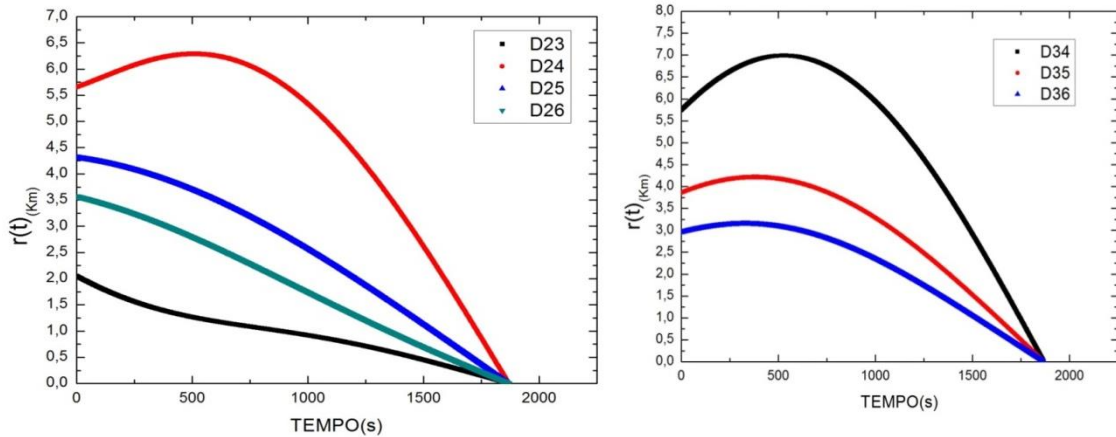


Figura 1- Dinâmica relativa entre: a) o detrito 2 em relação aos detritos 3,4,5 e 6 e) b) o detrito 3 em relação ao 4,5, e 6, da nuvem de 6 detritos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS (ou Conclusão)

Podemos concluir dos estudos que foi possível estabelecer, com dedução das equações de otimização, o controle ótimo para as manobras evasivas com modelo linear e exponencial da massa. Com essas equações pode-se determinar as taxas de massa que realizariam uma melhor manobra a baixo custo de combustível. No entanto, devido à complexidade das equações encontradas, será necessário a utilização de ferramentas computacionais pesadas para cada extração da condição buscada no controle. Com respeito à nuvem de detritos, verificamos que o veículo espacial terá de ajustar os parâmetros tecnológicos do seu sistema de propulsão para escapar de detritos de diversos tamanhos, os quais compõem a nuvem, e em tempos diferentes.

REFERÊNCIAS

1. CLOHESSY, W.H.; WILTSHIRE, R. S.1960. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, p.653-659.
2. KIRK, D. E.; Optimal control theory: an introduction. EnglewoodCliffs: Prentice-Hall, 1970.
3. JESUS ET AL, 2012, Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, vol 2012, Article ID 126521, 15 pages