

O BANQUETE DE HILBERT OU UM DIÁLOGO SOBRE O INFINITO

Arlete Cerqueira Lima

Prof. Adjunto do Dep. de Educação

Mestre em Matemática pela UFBA

RESUMO – Este artigo versa sobre a história do encontro de Sócrates e Gödel em uma das ruas do céu. Sócrates solicita a Gödel as mais recentes informações sobre o progresso da Matemática no século XX. Gödel lhe informa que está vindo de um banquete oferecido por Hilbert a matemáticos e lógicos. O objetivo de Hilbert, matemático alemão que morreu aos 81 anos, em 1943, era discutir o problema do infinito através dos tempos, começando com Tales de Mileto, no século IV a.C até a segunda metade do século XX com Gödel. A partir do local de encontro, começa um diálogo entre as duas personagens, sobre tudo o que se passou no banquete de Hilbert.

ABSTRACT – This article is about the meeting between Socrates and Gödel in one of the streets of Heaven. Socrates bids Gödel to update him on the progress of Mathematics on the 20th century. Gödel informs him that he was returning from a banquet offered by Hilbert to mathematicians and logicians. Hilbert, a German mathematician who died at 81 years of age in 1943, had the goal of discussing the matter of infinite throughout ages, beginning with Thales from Millet, in the 4th century b.C. up to the second half of the 20th century with Gödel. As they meet, they start to dialogue about everything that took place in Hilbert's banquet.

Personagens: – Sócrates, filósofo grego do IV século a.C.
– Gödel, matemático austríaco, da segunda metade do século XX, (1906–78).

- S – Oh! meu caro Gödel, que bom encontrar-te! Há muito o procuro e dize-me, de onde vens e para onde vais?
- G – Sócrates! É minha a alegria em ver-te! (Sócrates e Gödel abraçam-se). Venho de um banquete oferecido por Hilbert a alguns lógicos e matemáticos e dirijo-me à minha morada.
- S – Estou deveras curioso, Gödel, para saber quem eram os outros convidados e o que conversaram.
- G – Eu te contarei se tiveres tempo para me acompanhar.
- S – Por certo, farei qualquer coisa para ouvir-te, pois, como já disse, há muito desejo estar contigo para ter notícias recentes da segunda metade deste fabuloso século XX.
- G – Mas, que tipo de notícia queres, Sócrates? Sobre as guerras, os problemas sociais, sobre o desenvolvimento científico?
- S – Por Zeus, Gödel! Gostaria de saber muito sobre tudo isso, mas a minha grande curiosidade diz respeito aos progressos da Matemática. Tu bens sabes que não

me dediquei a essa ciência e...

- G – Mas usaste o seu rigor e a sua lógica na filosofia, na política e nos problemas do cotidiano.
- S – Certamente, isso eu não poderia negar, Gödel!
- G – Seria impossível, meu caro amigo, falar sobre a Matemática como um todo, apesar de os matemáticos do século XX, através da teoria dos conjuntos de Cantor, terem conseguido uma grande síntese do pensamento matemático, buscada desde os tempos de Leibniz, no século XVII. E, respondendo à tua pergunta, os convidados para o banquete de Hilbert foram escolhidos com o objetivo de, juntos, fazerem uma síntese sobre a história do infinito, pois, segundo o próprio Hilbert, "nenhuma outra questão moveu tão profundamente o espírito humano" (Sócrates e Gödel começam a caminhar lentamente).
- S – Por Zeus, este tema é fascinante e se não te incomodares, gostaria de saber como se passaram as discussões entre os convidados para o banquete.
- G – Antes disso, Sócrates, completarei a resposta à tua pergunta inicial: os convidados para o banquete foram pessoas que com maior ou menor intensidade deram, através dos tempos, alguma contribuição para elucidar o problema do infinito. Compareceram Tales de Mileto, Zeno de Elea, Euclides, Galileu, Cantor, Zermelo, Russell e eu. Infelizmente não se fizeram presentes Aristóteles, Descartes, Leibniz e Gaus.
- S – Não só Tales e Zeno, mas muitos outros que me precederam, astrônomos, filósofos e pensadores de um modo geral, se preocuparam com o infinito. A história nos diz que, aproximadamente, há 50 000 anos a.C. havia evidência de contagem e que alguns povos primitivos usavam "um, dois e muitos".
- G – E eu sempre me encantei, Sócrates, com a afirmação de Kronecker de que o conjunto dos naturais, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ fora criado por Deus! O homem fez o resto.
- S – Posso inferir, Gödel, que o fato de seres convidado para o banquete significa que o infinito continua sendo um assunto a preocupar lógicos e matemáticos da segunda metade do século XX.
- G – Se tiveres paciência, tempo e disposição, verás como Hilbert tinha razão! (Sócrates e Gödel entram em uma habitação celestial e se sentam em poltronas macias de uma ampla sala).
- S – Tua mansão é deveras agradável! E dou-me conta, Gödel, de que infinito para nós é o tempo. E, mais que isso, eu não mais preciso ir ao mercado da polis, mesmo quando ia só para ver as coisas das quais não necessitava. Mas, voltemos ao ponto onde nossa conversa foi interrompida, quando falávamos do banquete.
- G – Hilbert começou por pedir a Zeno que ficasse à sua esquerda e a Cantor, à sua direita. Os demais convidados escolheram livremente os seus lugares. Depois de sentados, Hilbert os brindou com vinho, anunciou a sua intenção e justificou a escolha dos convidados afirmando que, para se conhecer bem um problema é necessário dominar bem a história desse problema.
- S – Podes me explicar por que Zeno e Cantor tiveram lugar privilegiado junto a

Hilbert?

- G – Hilbert não deu explicações, Sócrates, mas é fácil inferir que por causa dos paradoxos de Zeno a humanidade obteve os primeiros registros dessa preocupação com o infinito, no século V a.C. E foi Cantor quem, milhares de anos depois, precisamente na primeira metade do século XX, criou uma teoria sobre o infinito bastante operacionável, através da teoria dos conjuntos, à qual já fiz alusão.
- S – Desculpa a minha interrupção, Gödel, e continua a fala de Hilbert!
- G – Hilbert insinuou, a seguir, que poderíamos tomar como ponto de partida alguns paradoxos de Zeno, dentre eles os mais populares, como o da dicotomia e o de Aquiles. Com a palavra, Zeno os resumiu, acrescentando que se utilizara dos conceitos de espaço e de tempo para demonstrar a impossibilidade do movimento.
- S – Recordo-me, Gödel, que no ágora, muito discutíamos sobre tais paradoxos. Se me lembro bem, o paradoxo da dicotomia afirma que para um corredor chegar a determinado alvo, ele deve, antes de mais nada, chegar à primeira metade da distância entre ele e o referido alvo; antes disto, entretanto, deverá chegar ao primeiro quarto, uma vez atingido o primeiro oitavo e assim sucessivamente, através de um número infinito de subdivisões que terão que ser alcançadas em um tempo finito. A conclusão, meu caro Gödel, é que o corredor não sairá do lugar!
- G – Vês como estás situando o problema do infinito neste paradoxo, meu caro Sócrates?
- S – Nas discussões no ágora, sempre achamos que o paradoxo de Aquiles repete o da dicotomia, em sentido contrário. Aquiles, considerado o corredor mais rápido da Grécia, aposta corrida com uma tartaruga, dando uma vantagem a esta. Mas, ao atingir o lugar onde a tartaruga estava, ele já se encontrava mais adiante, não sendo possível para Aquiles atingir a tartaruga.
- G – Sabes, Sócrates, a razão de tais paradoxos?
- S – Por Zeus, Gödel, como gostaria de saber!
- G – Em primeiro lugar, os gregos não tinham conhecimento de que os instantes $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ implícitos nesses paradoxos formavam uma seqüência convergente. (Gödel dá a Sócrates o conceito de seqüência convergente). Em segundo lugar, os conceitos intuitivos de reta e ponto eram ingênuos e, portanto, traiçoeiros, desde o século VI a.C com Tales de Mileto.
- S – Isso justifica o motivo pelo qual Tales foi convidado para o banquete?
- G – Tudo indica que sim, pois nessa altura da discussão entre os convidados, Hilbert solicitou de Tales uma explicação mais minuciosa sobre tais conceitos e ele afirmou que os havia aprendido com os egípcios: estes concebiam a reta formada por corpúsculos materiais de extensão não nula – concepção esta que muito atrapalhou os geômetras da antiguidade.
- S – Por Hércules, agora está clara a impossibilidade nos citados paradoxos de Zeno, de um número infinito de subdivisões ser exaurido em um tempo finito.
- G – Segundo a explicação de Tales, esses foram os motivos.

- S – Tu afirmaste que Aristóteles, Descartes, Leibniz e Gauss não compareceram ao banquete. Eles também estudaram o problema do infinito?
- G – Certamente. Todos eles e muitos outros. Cada um na sua época e com as ferramentas matemáticas de que dispunham. Entretanto, eles não conseguiram dar uma contribuição maior para esclarecer o problema.
- S – Confesso, Gödel, que estou bastante curioso para saber qual a participação de Galileu no banquete de Hilbert. O infinito o atormentava ao contemplar os milhares de milhares de corpúsculos brilhantes no céu? Ou seriam as grandes distâncias entre a Terra e as estrelas? (Gödel, ao pegar o lápis e papel, responde).
- G – Não, meu caro Sócrates! Ao ser interrogado por Hilbert, ele expôs que sempre aprendeu que “a parte era considerada menor que o todo”. Entretanto, ao verificar que a cada número natural era possível fazer corresponder o seu quadrado e vice-versa,

1	2	3	4	...	n	...
↑	↑	↑	↑		↑	
1	4	9	16	...	n^2	...

como poderia isso acontecer, dizia Galileu, se nem todo número é um quadrado? Esse tipo de correspondência de que acabo de te falar, Sócrates, é conhecida como correspondência um-a-um ou correspondência biunívoca. E este questionamento ficou conhecido na história como ‘o paradoxo de Galileu’.

- S – Lembro-me das intermináveis discussões no agora com colegas e discípulos onde muito falávamos sobre essas coisas: ‘a impossibilidade do movimento’, ‘o enigma do infinito’, ‘o mistério do vácuo’, ...
- G – Se não sabes, Sócrates, informo-te que os problemas que acabo de citar ficaram conhecidos na história como os três horrores gregos: ‘o horror ao infinito’, ‘o horror ao movimento’ e o ‘horror ao vácuo’. E este último, talvez, seja responsável pelo fato de não terem sido os gregos os criadores do zero.
- S – Voltando aos paradoxos, estou começando a sentir como eles são importantes. Eles criam uma insatisfação que leva os cientistas à resolução do problema que gerou essa insatisfação.
- G – No caso do paradoxo de Galileu, por exemplo, ele foi muito importante na caracterização dos conjuntos infinitos dada por Cantor: “um conjunto diz-se infinito se ele pode ser posto em correspondência um-a-um com uma sua parte própria” (Gödel faz uma digressão no diálogo para iniciar Sócrates na teoria dos conjuntos de Cantor).
- S – E estou aqui a me dar conta de que a distância, no tempo, entre Galileu e Cantor é, aproximadamente, de 5 séculos!
- G – Exatamente, Sócrates.
- S – Pelo que me dissesse no início deste nosso diálogo, inferi que a grande estrela

- S – Por Zeus, juro que não consigo! Mais que isso, juro não acreditar ser isso possível!
- G – Não te assustes, por não consegues, Sócrates! Trabalhar com relações entre seqüências infinitas requer treino e passaste quase toda a tua vida dedicando-te a discussões muito interessantes sobre a ética, o amor, a virtude e a moral. Veja como tudo se tornará simples, se dispuseres o conjunto de todas as frações da maneira que aqui colocarei e, em seguida o ordenares segundo as setas: Dessa maneira, fica demonstrado que $\bar{N} = \bar{Q}$
- S – Tal demonstração é deveras deslumbrante! E cada vez me convenço que seria impossível falar de Matemática, sem fazer demonstrações. Pelo que vimos até aqui posso inferir que existe uma infinidade de conjuntos equivalentes a N .
- G – É verdade. E Cantor chamou de 'enumerável' a todo conjunto equivalente a N .
- S – Fazendo retornar a nossa conversa ao banquete de Hilbert, tu disseste que Cantor havia sido um instado a falar sobre as suas principais descobertas relacionadas com o infinito. Sobre o que mais Cantor falou?
- G – A seguir, ele fez uma afirmação bem interessante, Sócrates: que se só existisse a classe dos conjuntos enumeráveis, a sua teoria sobre o infinito não faria sentido.
- S – Queres dizer que ele mostrou que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma cardinalidade?
- G – Exato, Sócrates! Ele demonstrou, por exemplo, que o conjunto dos números naturais não é equivalente ao conjunto dos pontos de um segmento aberto da reta. Queres tentar tal demonstração, Sócrates?
- S – Por Hércules, por certo não saberei encontrar o caminho para tal, a menos que tratássemos de um segmento da reta de Tales. (Sócrates e Gödel riem). Mas, meu caro Gödel, se me conduziste até aqui com tanta paciência, dize-me como Cantor conseguiu este resultado!
- G – Esta demonstração é simples e se baseia na conhecida regra da contraposição da lógica aristotélica. Cantor considerou todos os elementos do intervalo $(0,1)$ expressos sob forma decimal infinita.
- S – Podes ilustrar esta tua afirmação, Gödel?
- G – Por exemplo: $1/6 = 0,1666\dots$, $1/2 = 0,1999\dots$, etc.
Cantor partiu do pressuposto que o referido conjunto fosse enumerável; conseqüentemente, poderia dispor os seus elementos na seguinte ordem:

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & & \\ 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & & \\ 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

- S – E, dessa maneira poderia estabelecer uma correspondência um-a-um com os números naturais.
- G – Exatamente. Em seguida, ele exibiu um elemento do intervalo $(0,1)$ diferente

de qualquer elemento da referida seqüência.

S – Agora parece-me que começo a compreender o objetivo de Cantor nessa demonstração, mas me sinto incapaz de chegar à conclusão.

G – O elemento ao qual me referi foi definido por:

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots \text{ onde } b_k = 9 \text{ se } a_{kk} = 1 \\ \text{e } b_k = 1 \text{ se } a_{kk} \neq 1$$

É simples, Sócrates: se considerares, por exemplo $K=1$, terás

$$b_1 = 9 \text{ se } a_{11} = 1 \\ \text{e } b_1 = 1 \text{ se } a_{11} \neq 1 \\ \text{para } k = 2, \quad b_2 = 9 \text{ se } a_{22} = 1 \\ \text{e } b_2 = 1 \text{ se } a_{22} \neq 1, \text{ e assim sucessivamente.}$$

S – Nestas condições, está bem claro que o elemento $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ pertence ao intervalo $(0,1)$ e não coincidirá com qualquer elemento da seqüência considerada! Mas isto é fantástico! Que genialidade a de Cantor! Sinto que a estética e a simplicidade caracterizam as suas demonstrações.

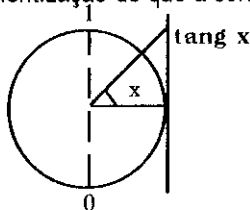
G – Estás com a verdade, Sócrates! Mas o teu entusiasmo contagiante me fez esquecer onde ficou a nossa conversa.

S – É que, no banquete de Hilbert, Cantor concluiu que há pelo menos dois tipos distintos de infinito: o dos conjuntos enumeráveis e o representado pelo conjunto dos pontos do segmento $(0,1)$ da reta. Mas, por Zeus, dize-me qual a potência de toda a reta? (Sócrates acrescenta, rindo). Não a reta de Tales, mas a reta formada pelo conjunto dos racionais e dos irracionais.

G – (Interrompendo a seqüência do diálogo). Por falar em conjuntos dos irracionais, teu discípulo Platão o imortalizou de diversas formas e caminhos: além de seres uma personagem constante nos seus famosos Diálogos, te tornaras uma figura mítica dos mestres de todos os tempos por causa de um especial diálogo entre ti e o escravo de Mênon sobre grandezas incomensuráveis – o que levou o escravo à descoberta da existência dos números irracionais. (Sócrates gargalha e retoma a conversa com simplicidade).

S – Mas, voltando à tua pergunta, Sócrates, sobre a potência da reta real, é fácil mostrar que não só o segmento $(0,1)$ mas qualquer segmento (a,b) da reta tem o mesmo número de elementos da reta. (Gödel desenha em um papel a figura a seguir e, dialogando com Sócrates o leva à conscientização de que a correspondência.

$$\begin{array}{lcl} (0,1) & \longrightarrow & \mathfrak{R} \\ x & \longrightarrow & \tan x \end{array}$$



é um-a-um, ou biunívoca

S – Confesso a minha perplexidade com a estética desta demonstração! Confesso também, meu amigo, que estou curioso para saber qual a reação de Tales e de Zeno a essas demonstrações feitas por Cantor, no banquete de Hilbert!

G – Pelos deuses, juro que eles pensaram que Cantor era um mágico. De fato, a reunião do poder com a simplicidade, na teoria de Cantor, se confunde com a magia!

S – Gödel por favor, continua!

G – Uma vez exibido por Cantor dois tipos distintos de infinito, ele chamou à potência dos enumeráveis de $\aleph_0$ (que se lê: alef zero). Bem sei que tu sabes, Sócrates, que $\aleph$ é a primeira letra do alfabeto hebraico; mas a explicação do índice 'zero' prometo dar depois. Além disso, Cantor indicou a potência $\mathfrak{R}$, do conjunto dos reais, por $\mathfrak{C}$, letra gótica, inicial da palavra 'continuum', designação dada à reta real.

(A seguir, Gödel faz uma digressão e dá a Sócrates os conceitos necessários para a continuação do diálogo: explica, de modo preciso, os conceitos de função, de função biunívoca, de produto cartesiano, das operações entre conjuntos e desmistifica Sócrates o conceito de conjunto vazio. Mostra, usando a lógica, como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. Demonstra, ainda, que qualquer segmento de reta tem a mesma cardinalidade que qualquer retângulo do plano ou que qualquer cubo do espaço; coroa esta parte mostrando que o resultado também vale para todo espaço n-dimensional não limitado).

S – No teu entusiasmo, Gödel, será que não esqueceste outras coisas sobre a teoria de Cantor, comentadas no banquete de Hilbert?

G – Foram tantas, Sócrates, que por certo precisarei ordenar o meu pensamento. Lembro-me que, para responder a uma pergunta de Tales sobre a 'densidade' da reta real, Cantor mostrou que é possível fazer uma verdadeira aritmetização do infinito, à semelhança da que é feita para cardinais finitos. Cantor a chamou de 'aritmética dos transfinitos'.

S – Podes me dar uma idéia dessa aritmética, Gödel? Juro que não te exigirei demonstrações dessa vez!

G – Tu bem sabes, Sócrates, que este nosso diálogo é um grande prazer para mim. E, para facilitar a resposta à tua pergunta, indicarei a potência de qualquer conjunto enumerável pela primeira letra do alfabeto gótico minúsculo $\mathfrak{A}$.

S – Vais substituir, então, $\aleph_0$ por $\mathfrak{A}$?

G – Exatamente. Ainda, indicado por n e p números naturais quaisquer, Cantor demonstrou que

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} + n = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \cdot n = \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C} + n = \mathfrak{C} + \mathfrak{A} = \mathfrak{C} + \mathfrak{C} = n \cdot \mathfrak{C}$$

Ainda, se: $\bar{x} = \mathfrak{M}$ e $\bar{y} = \eta$, então, $(\mathfrak{M} \cdot \eta)^p = \mathfrak{M}^p \cdot \eta^p$ e $\eta^n \cdot \eta^p = \eta^{n+p}$, etc.

Acrescento, ainda, que as relações de desigualdade entre números transfinitos se comportam da mesma maneira que entre números finitos. Cantor também trabalhou com ordinais transfinitos, mas disso não se cogitou no banquete de Hilbert.

- S – E depois de todas estas explicações, qual foi a resposta de Cantor a Tales sobre a 'densidade' da reta?
- G – Cantor mostrou, inicialmente, que se A, B e C são conjuntos quaisquer, disjuntos, tais que $A = B \cup C$, então,

$$\overline{A} = \overline{B \cup C} = \overline{B} + \overline{C}.$$

Em seguida, se chamarmos de I ao conjunto dos irracionais, tem-se, como já foi por ti colocado, que o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos racionais com o dos irracionais. Em símbolos tudo fica mais fácil:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$$

Como Q e I não tem elementos comuns, então, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} + I$. Tendo sido demonstrado que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} + I$ e que $\mathbb{Q} = \mathbb{R} - I$, o próprio Tales concluiu que a densidade do conjunto dos reais era devida ao conjunto dos irracionais.

- S – Por Hércules, não saberia encontrar resposta para a pergunta de Tales! E posso avaliar o êxtase de Tales diante de tais elucidações! Resumindo, Gödel, existem dois transfinitos distintos, $\aleph_1$ e $\aleph_2$ e com eles é possível efetuar operações, cujos resultados coincidem com $\aleph_1$ ou com $\aleph_2$. Pára aí a teoria de Cantor.
- G – Felizmente não, Sócrates. Uma vez descobertos $\aleph_1$ e $\aleph_2$ o passo seguinte de Cantor foi inspirado no conjunto de todas as partes de um conjunto finito dado. Só para facilitar teu raciocínio, Sócrates, suponhamos um conjunto A com três elementos, por ex., a, b e c:

$A = \{a, b, c\}$. O conjunto de todas as partes de A é indicado por

$$\wp(A) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{ \} \}.$$

onde { } representa o conjunto vazio. Pois bem, Cantor demonstrou que se A tem n elementos, $\wp(A)$ terá 2^n elementos e que esse resultado é válido também para conjuntos infinitos. Em outras palavras, quer seja A finito ou infinito

$$\overline{\wp(A)} = 2^{\overline{A}}$$

- S – E qual a relação deste fato com as novas descobertas de Cantor?
- G – É algo tão importante que leva o nome de 'Teorema de Cantor':

$$\aleph_1 \neq 2^{\aleph_1}$$

- S – Dizendo de outro modo, nenhum conjunto X tem potência igual à da família de todos

os seus subconjuntos. Nestas condições $\aleph_0 \neq 2^{\aleph_0} \neq 2^{2^{\aleph_0}} \neq \dots$

G – E qual a conclusão que tu tiras daí meu caro Sócrates?

S – Que existe uma infinidade de transfinitos diferentes!

G – Cantor indicou essa cadeia crescente da seguinte maneira:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$$

S – E aí está o motivo do índice '0': $\aleph_0$ seria o primeiro transfinito.

G – Tu não esqueces nada, Sócrates!

S – Posso concluir, Gödel, que a sequência dos transfinitos forma um conjunto enumerável?

G – Isso foi bastante discutido no banquete de Hilbert!

S – E na sequência acima de alefs onde se situaria $\diamond$?

G – Cantor demonstrou que $2^{\aleph_0} = \diamond$; portanto, $\aleph_1 = \diamond$.

S – E entre $\aleph_0$ e $\diamond$ existe algum transfinito?

G – Pelos deuses, Sócrates, abordaste um assunto de muita polémica. Esta tua pergunta é conhecida como a 'conjectura de Cantor' ou a 'hipótese do continuum' e até a minha saída do planeta Terra não havia sido respondida.

S – Ela foi mencionada no banquete?

G – É claro. Inclusive, Hilbert informou a todos que em 1900 ele elaborara uma lista de problemas matemáticos até então não resolvidos e que a 'hipótese do continuum' encabeçava essa lista.

S – Por Zeus, meu caro Gödel, estou aqui a pensar e a fazer comparações com acontecimentos passados. Nesse nosso diálogo vimos que, provavelmente, a razão de ser de alguns paradoxos de Zeno residia numa conceituação mal formulada de reta. Será que a conjectura de Cantor não foi ainda resolvida por alguma má conceituação na teoria dos conjuntos?

G – Tua comparação é perfeita, Sócrates! E, provavelmente, foi também pensando dessa maneira que os matemáticos dessa época decidiram fazer uma revisão nos fundamentos da teoria dos conjuntos de Cantor.

S – Podias aprofundar mais o que falas, se não te impacientares, meu caro Gödel, pois estou muito curioso!

G – É claro, Sócrates! Lembra-te que dispomos de um tempo infinito e que cansaço para nós não existe.

S – Queres dizer que somos eternos e absolutamente livres!

G – Exatamente, Sócrates. Apenas, proponho-te um passeio pelas margens do Rio da Vida, pois os seus jardins exercem um fascínio muito grande sobre mim.

S – Com todo prazer, Gödel. (Os dois saem andando devagar).

G – Continuando a nossa conversa, gostaria de relatar-te o diálogo travado no banquete entre Cantor e Bertrand Russel sobre a aludida revisão nos fundamentos da teoria cantoriana. Russell afirmou que a definição de conjunto dada por Cantor como "qualquer coleção formada por objetos definidos e separados da nossa intuição ou pensamento" o levou à conclusão de que 'existe o conjunto de

todos os conjuntos'.

- G – E Russell continuou explicando a Cantor que se existisse um conjunto X , cujos elementos fossem todos os conjuntos possíveis, a função identidade

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow X \\ A &\longrightarrow f(A)=A \end{aligned}$$

assumiria como valores todos os subconjuntos do conjunto X , uma vez que estes subconjuntos seriam elementos do conjunto X . E continuou Russell: vamos acrescentar que da hipótese (falsa) de que existe o conjunto de todos os conjuntos segue a existência de

$$Z = \{A \mid A \notin A\}$$

Porém, a existência do conjunto Z conduz imediatamente a uma contradição, porque

$$\begin{aligned} A \in Z &\Leftrightarrow A \notin A, \text{ por definição de } Z \text{ e, portanto,} \\ Z \in Z &\Leftrightarrow Z \notin Z. \end{aligned}$$

- S – E qual a reação de Cantor a essa antinomia de Russell?
 G – Cantor afirmou que sua intenção era a de dar uma conceituação a mais transparente e intuitiva possível do termo 'conjunto' e que tal definição havia funcionado muito bem para os objetivos a que se havia proposto.
 S – Será, Gödel que a definição de conjunto de Cantor era tão 'ingênua' quanto a conceituação de reta de Tales? E como esse problema foi resolvido?
 G – Ora, Cantor designava a existência de um conjunto através da notação:

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

ou seja, o conjunto de todos os elementos x que gozam da propriedade $\varphi(x)$. É claro que, se tomares, na expressão acima para $\varphi(x)$: ' x é um conjunto', obterás como consequência imediata, 'a existência do conjunto de todos os conjuntos'. Com a revisão dos fundamentos, foram elaboradas algumas axiomatizações da teoria dos conjuntos, destacando-se entre elas a de Zermelo e paradoxos desse tipo foram eliminados ao delimitar um universo U para a variação de x ; assim, a expressão acima foi substituída por

$$\{x \in U \mid \varphi(x)\}$$

- S – Pelo que pode entender, provavelmente a presença da palavra qualquer que corresponde ao 'todo' de Aristóteles, foi a responsável pela conclusão de Russel. Peço-te que me situes no tempo, Gödel!

- G – Tudo isso se passou na primeira década do século XX. Mas, referindo-me ainda ao banquete, informo-te que nessa altura da discussão, Hilbert, querendo provocar especialmente Euclides, fez a seguinte pergunta: será que os paradoxos de Zeno decorreram dos conceitos intuitivos e ingênuos de Tales e que 300 anos depois levaram Euclides a uma axiomatização da Geometria?
- S – Está claro para mim que Hilbert fez comparações da tríade Tales, Zeno e Euclides com o terceto Cantor, Russell e Zermelo. Dizendo de outra maneira, em ambos os casos, conceitos ingênuos levaram a paradoxos, que, por sua vez conduziram a axiomatizações!
- G – A intenção de Hilbert era exatamente esta, Sócrates, e tu a captaste com precisão.
- S – E quantos anos se passaram entre Cantor e Zermelo?
- G – Aproximadamente 30 anos.
- S – Antes que eu esqueça, qual a reação de Euclides à provocação de Hilbert?
- G – Até então Euclides permanecera como mero espectador no banquete. Tomando a palavra e depois de saudar os presentes, afirmou que sentiu necessidade de organizar, ou, mais precisamente, de sistematizar os conceitos geométricos utilizados pelos seus predecessores, destacando entre eles Pitágoras. Fez, a seguir, um esboço de axiomatização da geometria, justificando porque tomara o ponto, a reta e o plano como entes primitivos; enunciou as proposições que ele também havia considerado como primitivas (os axiomas) por serem evidentes por si mesmas. E falou mais rapidamente dos teoremas que são proposições deduzidas dos axiomas ou de outros teoremas já demonstrados. Depois que Euclides terminou a sua fala, Hilbert lhe fez muitos elogios e afirmou que certamente não só os gregos mas os seus sucessores, de um modo geral, se sentiram muito mais seguros depois que a geometria passou a depender apenas de deduções lógicas feitas através da axiomática euclidiana.
(Gödel aproveita a oportunidade para dar a Sócrates um conceito mais preciso de axiomatização de uma teoria e de formalização de um sistema).
- S – Falamos sobre Zermelo, que estava presente no banquete, mas confesso-te que nada sei sobre ele, além do que me disseste. Por acaso, a sua axiomatização resolveu a conjectura de Cantor?
- G – Para melhor responder à tua pergunta, Sócrates, devo explicar-te, de antemão, que uma determinada axiomática deu origem à chamada 'teoria restrita dos conjuntos'. Zermelo acrescentou à essa axiomática, mais um axioma, conhecido posteriormente como 'axioma de Zermelo' ou 'axioma da escolha', gerando a 'teoria convencional dos conjuntos'.
- S – Pelo que entendi, a diferença entre a teoria restrita e a convencional está exatamente no axioma da escolha. Mas, que axioma é este, Gödel, e qual a sua importância na Matemática da segunda metade do século XX?
- G – Vamos por partes, Sócrates. Este axioma diz o seguinte: "se α é uma coleção qualquer de conjuntos

$$\alpha = \{ A, B, C, \dots \}$$

e nenhum dos conjuntos de α é vazio, existe um conjunto Z que consiste precisamente de um elemento de A , de um elemento de B e assim sucessivamente, percorrendo todos os conjuntos de α ".

- S – Podes dar uma ilustração, Gödel, de tal axioma?
- G – Claro, Sócrates. Por exemplo, se α consiste de dois conjuntos: o conjunto A de todos os prismas e o conjunto B de todos os cubos então α satisfaz claramente ao axioma da escolha: basta escolher algum prisma em A e algum cubo em B e estes dois elementos constituirão Z .
- S – Vejo que este axioma não apresenta dificuldade quando se trata de uma coleção finita de conjuntos, mas, se a coleção for infinita, Gödel?
- G – Este é o problema, Sócrates. Se α tiver um número infinito de conjuntos e se alguma regra for dada com o objetivo de distinguir um elemento em cada um destes conjuntos também não haverá dificuldade. Mas, se nenhuma regra é formulada, teríamos que escolher arbitrariamente um elemento de cada um dos conjuntos de α , em um número infinito de operações.
- S – Mais uma vez, Gödel, lembro-te que não sou um matemático. Se não te canso, poderias me dar um exemplo que ilustre a impossibilidade de construir o conjunto Z no axioma da escolha?
- G – Ah, Sócrates! Posso repetir um jocoso exemplo do que me pedes, dado por Russell nas discussões entre ele e Zermelo no banquete de Hilbert. E assim falou Russell: em países civilizados, os sapatos são desenhados de modo que o sapato direito e o esquerdo de cada par são diferentes; porém, a distinção entre direito e esquerdo não pode ser feita para pares de meias. Vamos imaginar um homem infinitamente milionário e excêntrico que mantém uma coleção de infinitos pares de sapatos e infinitos pares de meias. Então este homem tem à sua disposição um conjunto de sapatos que contém exatamente um sapato de cada par: o conjunto infinito de sapatos do pé direito. Porém, como é que ele obtém o conjunto de meias do pé direito?
- S – Já vi que Russell tinha prazer em descobrir antinomias! Mas, afinal de contas, onde estava o problema, no axioma da escolha, que gerava essas antinomias?
- G – É a liberdade que caracteriza a coleção α : 'qualquer coleção de conjuntos'...
- S – E a história se repete, meu caro Gödel! Novamente, a palavrinha 'qualquer'. E qual a importância desse axioma? Não seria melhor se os matemáticos optassem pela teoria restrita dos conjuntos?
- G – Ocorre, Sócrates, que o axioma da escolha é uma ferramenta poderosa para a Matemática. Conheces o teorema da indução finita ou indução matemática? (Gödel explica a Sócrates tal teorema e faz ilustrações). Pois bem, o axioma da escolha é usado na demonstração do teorema da indução transfinita: podemos usar raciocínios indutivos para demonstrar afirmações sobre os elementos de qualquer conjunto, qualquer que seja a sua potência, da mesma maneira que a indução matemática pode ser usada para demonstrar teoremas sobre os números naturais 1, 2, 3, ...
- S – No banquete, eram muitos os matemáticos a discordarem do axioma de Zermelo?

- G – Não se deu muita importância a isso porque os diálogos, a partir desse momento, passaram a se concentrar sobre os meus trabalhos. Mas, posso te informar, Sócrates, que grandes matemáticos como Brouwer, Weyl e Poincaré tinham muitas dúvidas sobre o axioma da escolha.
- S – Finalmente, chegou a hora de dizeres como os teus trabalhos estão relacionados com o infinito e lembra-te que ainda me deves uma resposta sobre a relação entre a conjectura de Cantor e o axioma de Zermelo.
- G – Em realidade, meu caro Sócrates, os meus trabalhos estão ligados a todas estas coisas e, provavelmente, por esse motivo, eu tenha sido o último dos convidados de Hilbert a falar. Estudei muito a completude e a consistência de um sistema formal. A grosso modo, uma teoria formal consistente significa: se ela contém determinada proposição, não contém a sua negação. É uma teoria formal é completa quando nela toda fórmula bem-formada, se não é um teorema, a sua negação o será. Meus trabalhos sobre completude e consistência em teorias formalizadas mexeram muito com os matemáticos do século XX. E através do artigo intitulado "Sobre as proposições indecidíveis dos Principia Mathematica e sistemas correlatos" eu mostrei que é possível a construção de proposições bem-formadas sobre as quais não se pode deduzir se são verdadeiras ou falsas.
- S – Antes que continues, Gödel, me deves explicações sobre este *Principia Mathematica* de que falas e pelo menos um exemplo de uma proposição sobre a qual, em pleno século XX, não se pode demonstrar se é verdadeira ou falsa.
- G – Perdoa-me, Sócrates! Às vezes penso que estou dialogando com um matemático esquecendo que era a filosofia a tua paixão. *Principia Mathematica* foi a grande obra, no campo da lógica, do século XX e, portanto, de todos os tempos, escrita pelos nossos grandes amigos B. Russell e Whitehead. Quanto à tua segunda pergunta, basta que eu cite a conjectura de Goldbach, não demonstrada até a minha saída da Terra em 1978: "Todo número par é a soma de dois primos" (Sócrates, busca, mentalmente alguns exemplos de números que não satisfaçam à proposição citada por Gödel).
- S – Por Zeus, nunca me dei conta dessas coisas! E eu juraria por todos os deuses gregos, que a matemática da segunda metade do século XX era uma ciência estável e que continuava crescendo sem problemas nos seus fundamentos!
- G – Continuando, Sócrates, eu demonstrei que não podemos demonstrar que a conjectura de Cantor não é verdadeira. Foi precisamente em 1938 que eu demonstrei que 'se a teoria restrita dos conjuntos é consistente, o mesmo acontece com a teoria convencional'.
- S – Ou, usando a lógica aristotélica, demonstraste que 'se a teoria convencional dos conjuntos não é consistente, então a teoria restrita dos conjuntos também não o é'.
- G – Exato! E, usando outras palavras, a presença do axioma da escolha na teoria convencional não constitui um problema: se for possível achar alguma contradição na teoria convencional é porque ela já se encontra na teoria restrita.
- S – Que mais ousaste, Gödel?

- G – Eu demonstrei que podemos aceitar com segurança a hipótese do contínuo, ou seja, 'que não há cardinal infinito maior que $\aleph_0$ e menor do que $\aleph_1$ ', como axioma adicional na teoria dos conjuntos. Em outros termos, eu demonstrei que se a hipótese do contínuo mais a teoria restrita dos conjuntos implica numa contradição, então, mais uma vez, deve haver já uma contradição escondida na teoria restrita dos conjuntos.
- S – Como conseguiste isso, Gödel?
- G – Eu construí um modelo (Gödel explica a Sócrates o significado de 'modelo matemático') para a teoria restrita dos conjuntos e mostrei que nele o axioma da escolha e a hipótese do contínuo eram teoremas.
- S – Por Zeus! Parabéns, meu caro Gödel! Então tu resolveste o grande problema ligado aos transfinitos tão discutidos aqui por nós!
- G – Calma, Sócrates! Mas eu só consegui tal modelo utilizando uma classe especial de conjuntos: a dos chamados 'conjuntos construtíveis', ou seja, a grosso modo, cada conjunto dessa classe era obtido, por passos sucessivos, de conjuntos mais simples, usando sempre os axiomas da teoria restrita dos conjuntos.
- S – Podias detalhar, Gödel, para mim, a construção de tal classe?
- G – Confesso, Sócrates, que é algo demasiado longo, mas se tiveres interessado nos meus trabalhos, poderemos marcar outro encontro.
- S – Por Hércules, como gostaria! Mas, pelo que me disseste, infiro que os matemáticos do século XX admiraram, mas não aceitaram o teu trabalho pelo fato de teres utilizado uma classe especial de conjuntos, com uma finalidade específica.
- G – Exatamente, Sócrates!
- S – Que mais aconteceu no banquete?
- G – Outros problemas de consistência foram discutidos, todos eles colocados por Hilbert, mas que não diziam respeito ao problema do infinito.
- S – E qual a grande conclusão a que chegaram vocês no banquete, sobre o infinito?
- G – É que tanto a conjectura de Cantor como o axioma de Zermelo serão provavelmente responsáveis por um surto de atividades, cada vez mais crescentes, na segunda metade do século XX, dentro da lógica matemática.
- S – Mas pelo menos as tuas descobertas sobre a consistência relativa permitiram aos lógicos e matemáticos da vizinhança do terceiro milênio a liberdade de aceitar ou rejeitar a hipótese do contínuo.
- G – Com certeza, Sócrates!
- S – Quero agradecer-te, Gödel, por todas essas informações.
(Sócrates fica, de repente, pensativo)
- G – Em que estás a pensar, Sócrates?
- S – Em Cantor e na grandiosidade de sua obra. E, agora, Gödel, faço-te a seguinte pergunta: Se Cantor tivesse optado pela música, o que teria acontecido à Matemática do século XX?
- G – (Pensando durante muito tempo antes de responder). Provavelmente teria nascido um outro Cantor!
- S – E como terminou o banquete?

G – Hilbert, depois de agradecer e abraçar cada um, afirmou sorrindo: “ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor nos criou!”
(Os dois, Sócrates e Gödel, lançam um último olhar sobre os jardins que circundam o Rio da Vida, levantam-se e, calados, andam lentamente até o ponto em que se abraçam efusivamente e se separam, dirigindo-se cada um à sua mansão celestial).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOYER, C. B., *História da Matemática*, São Paulo: Edgar Blücher, 1974
DAVIES, P.J. e HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.
NEWMANN, J. R. *The world of Mathematics*. N. Y: Tempus, 1956.
KURATOWSKI, K. *Introduction to set theory and topology*. Elmsford, N. Y: Pergamon Press, 1961.