

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS NA FLEXÃO DE BARRAS COM FORTE NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

THE FINITE DIFFERENCE ENERGY METHOD IN THE BENDING OF BARS WITH STRONG GEOMETRIC NONLINEARITY

*José Mário Feitosa Lima **

*Luiz Fernando Tabora Garcia ***

RESUMO — *No presente trabalho, como uma seqüência natural de outro anteriormente publicado, é apresentada uma formulação numérica, utilizando o método das diferenças finitas energéticas, aplicada ao modelo analítico apresentado por Garcia (1987) para o problema da flexão dinâmica, com forte não linearidade geométrica, de barras prismáticas de material linearmente elástico, particularizado para o caso apenas de solicitações estáticas. Dois exemplos são analisados visando atestar a validade da referida implementação numérica.*

PALAVRAS-CHAVE: *Flexão de barras; Não linearidade geométrica; Método das diferenças finitas energéticas.*

ABSTRACT — *As the natural follow-up to a previously published paper, the current work presents a numerical treatment by means of the energetic finite difference method, applied to the analytical model developed by GARCIA (1987) for dynamic bending problems of linearly elastic prismatic bars with strong geometric nonlinearity. Only the particular case of static loading was considered, and two examples are analyzed to attest the efficacy of the numerical technique employed.*

* Prof. Assistente, DTEC(UFEFS), Engenheiro Civil, M. Sc.,
E-mail: jmflima@uefs.br

** Prof. Adjunto, PEC/COPPE/UFRJ, Engenheiro Civil, D.
Sc., E-mail: taborda@coc.ufrj.br

Universidade Estadual de Feira de Santana – Dep. de
Tecnologia. Tel./Fax (75) 224-8056 - BR 116 – KM 03, Campus -
Feira de Santana/BA – CEP 44031-460.

KEY WORDS: *Bending of bars; Geometric nonlinearity; Finite difference energy method.*

1 INTRODUÇÃO

Em artigo precedente, Lima e Garcia (2002), foram instituídas, para um modelo de flexão simétrica de barras apresentado por Garcia (1987), as expressões dos trabalhos virtuais interno e externo, bem como as equações diferenciais e correspondentes condições de contorno estáticas e cinemáticas para o problema, estas últimas, obtidas como uma consequência direta da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (ptv). Nesse modelo foram consideradas barras prismáticas de material linearmente elástico e incorporados efeitos de não linearidade geométrica, no âmbito de grandes rotações, e também de solicitações dinâmicas. Esses resultados serão, no presente trabalho, utilizados para dar suporte a um tratamento numérico pelo método das diferenças finitas energéticas (mdfe), traduzido pela utilização, na expressão do ptv, de representações em diferenças finitas para as derivadas no espaço. Deve ser ressaltado que o presente artigo é fruto de uma linha de pesquisa conduzida pelos autores, no âmbito do Departamento de Tecnologia da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) e do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ.

Em Garcia (1987), foram apresentadas formulações numéricas para esse mesmo problema com base no método tradicional de diferenças finitas (dft) e também no método dos elementos finitos (mef), assinalando-se que, em conjunto com essas técnicas, foi implementado, no caso de análise dinâmica, o método da aceleração constante como processo de marcha no tempo. Nesse trabalho, conforme relata o autor, ao se tentar tratar as equações diferenciais do problema utilizando dft ocorreram sérios problemas de convergência, os quais, após exaustivos testes, foram contornados com uma prévia integração das referidas equações, de modo a reduzir a ordem das derivadas envolvidas (considerando-se que os operadores de diferenças finitas se tornam tanto mais precisos quanto menor a ordem da derivada). Por outro lado, em Lima (1995), constatou-se que

a formulação desenvolvida por Garcia (1987), quando particularizada para o caso de não linearidade geométrica com rotações moderadas e tratada numericamente utilizando-se o mdfe, conduziu a resultados plenamente satisfatórios. Levantou-se então a questão de como se comportaria a formulação original de Garcia, tratada segundo essa técnica numérica alternativa. Portanto, o presente trabalho tem como objetivo principal verificar se a técnica numérica das diferenças finitas energéticas, ao ser aplicada à formulação geral de Garcia (1987) para a flexão de barras prismáticas no âmbito das grandes rotações (aqui limitando-se, por simplicidade, apenas ao caso de solicitações estáticas), produz resultados tão satisfatórios quanto os obtidos por Lima (1995) para rotações moderadas.

No desenvolvimento do presente artigo, resgatam-se, inicialmente, as expressões analíticas anteriormente deduzidas para os trabalhos virtuais interno e externo. Em seguida, passa-se à apresentação das representações em diferenças finitas utilizadas para as derivadas dos deslocamentos e às considerações necessárias, quanto à discretização da barra. São ainda tecidos comentários sobre a resolução do sistema de equações algébricas não lineares proveniente do tratamento numérico e, posteriormente, apresentados dois exemplos que foram analisados por Garcia (1987), os quais visam comprovar a eficácia do tratamento numérico aqui proposto para o problema. Finalmente, explicitam-se as conclusões relacionadas a essa pesquisa.

2 TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS INTERNAS

Supondo pequenas deformações e grandes rotações, utilizando a hipótese das seções planas, e considerando material linearmente elástico, deduziu-se em Lima e Garcia (2002), para o caso geral de flexão dinâmica, a expressão do trabalho virtual interno na barra, a qual, em se tratando de análise estática, fica assim particularizada:

$$\begin{aligned}
\delta W_{int} = \int_0^L \{ & EA \left(u' + \frac{3}{2} u'^2 + \frac{w'^2}{2} + \frac{u'^3}{2} + \frac{u'w'^2}{2} \right) + \\
& + EI_y (w''^2 + u'w''^2 - u''w'w'') \} \delta u' + \\
& + \left[EA \left(u'w' + \frac{u'^2w'}{2} + \frac{w'^3}{2} \right) - EI_y (u''w'' + u'u''w'' - u''^2w') \right] \delta w' - \\
& - EI_y (w'w'' + u'w'w'' - u''w'^2) \delta u'' + \\
& + EI_y (w'' + 2u'w'' - u''w' + u'^2w'' - u'u''w') \delta w'' \} dx \quad (1)
\end{aligned}$$

com $u(x)$ e $w(x)$ representando os deslocamentos axial e transversal de um ponto qualquer do eixo da barra (Figura 1), e sendo, A , I_y , e E a área da seção transversal, o momento de inércia da seção em relação ao eixo Y e o módulo de elasticidade longitudinal do material da barra, respectivamente.

3 TRABALHO VIRTUAL DAS FORÇAS EXTERNAS

A expressão para o trabalho virtual das forças externas, também previamente instituída em Lima e Garcia (2002), envolve a contribuição de cargas aplicadas no domínio e nas extremidades $x=0$ e $x=L$ da barra. No caso particular de carregamento estático, essa expressão assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\delta W_{ext} = \int_0^L [q_x(x)\delta u + q_z(x)\delta w] dx + [\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_z \delta w - \bar{M}_y \delta \theta]_0^L = \\
= \int_0^L [q_x(x)\delta u + q_z(x)\delta w] dx + [\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_z \delta w + \bar{M}_y w' \delta u' - \bar{M}_y (1+u') \delta w']_0^L \quad (2)
\end{aligned}$$

sendo as cargas de domínio representadas por:

- $q_x(x)$ - carga distribuída segundo o eixo X ;
- $q_z(x)$ - carga distribuída segundo o eixo Z ;

as cargas de extremidade por:

\bar{F}_x - força prescrita segundo X ;

\bar{F}_z - força prescrita segundo Z ;

\bar{M}_y - momento prescrito em torno de Y ;

e tendo-se utilizado para a rotação θ a relação

$$\tan \theta = w' / (1 + u') \rightarrow \delta \theta = -w' \delta u' + (1 + u') \delta w'.$$

Esse caso geral de carregamento está representado na Figura 1, destacando-se que todas as cargas foram representadas com os seus sentidos convencionados como positivos.

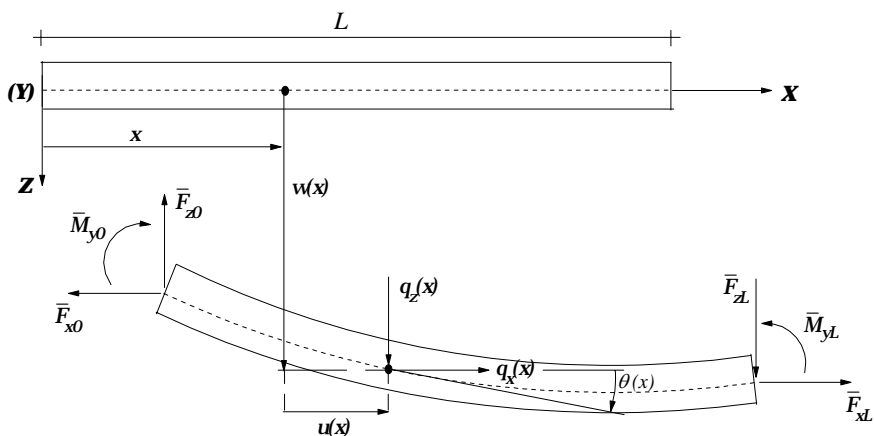


Figura 1 – Deslocamentos lineares u e w , rotação θ e esquema geral de carregamento na barra

4 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

O tratamento numérico do problema, segundo o mdfe, consiste em introduzir, nas expressões de δW_{int} e δW_{ext} , as representações em diferenças finitas para as derivadas dos deslocamentos, supondo-se, para fins de avaliação desses trabalhos virtuais, a barra subdividida em trechos de integração, ao longo dos quais todas as grandezas envolvidas são admitidas constantes. Por fim, da igualdade entre δW_{int} e δW_{ext} , e considerando-se as condições de vinculação da barra, surge um

sistema de equações algébricas não lineares de equilíbrio que, uma vez resolvido, permite obter os deslocamentos nodais u e w incógnitos do problema.

4.1 Representações em diferenças finitas para as derivadas dos deslocamentos

Apresentam-se, em seguida, as expressões em diferenças finitas utilizadas para as derivadas (primeira e segunda) dos deslocamentos no presente trabalho.

4.1.1 Representação convencional (RC)

De acordo com a representação convencional, escreve-se para as derivadas primeira e segunda (Figura 2).

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\lambda} \quad (3.a)$$

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\lambda^2} \quad (3.b)$$

onde os pontos $i-1$, i e $i+1$ são supostos igualmente espaçados da distância λ , e f traduz genericamente a função representativa dos deslocamentos u e w na barra.

4.1.2 Representação convencional melhorada (RCM)

Esta representação é, por hipótese, mais precisa que a anterior, por considerar termos de ordem superior na série de Taylor. As respectivas expressões para a primeira e segunda derivadas são apresentadas a seguir:

$$f'_i = \frac{1}{12\lambda} (-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}) \quad (4.a)$$

$$f''_i = \frac{1}{12\lambda^2} (-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}) \quad (4.b)$$

observando-se que, para avaliar essas derivadas no nó i , são requeridas, comparativamente à representação anterior, as contribuições adicionais dos nós $i-2$ e $i+2$ (ver Figura 2).

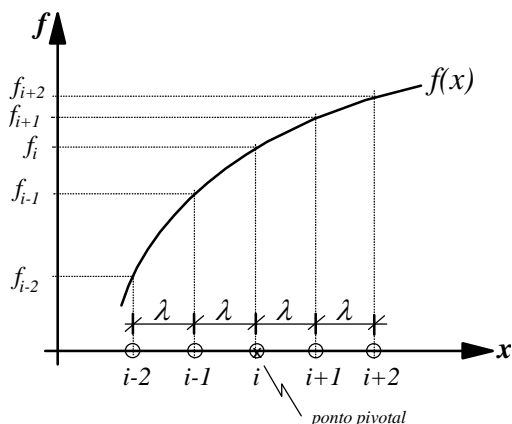


Figura 2 - Esquema para as representações convencional e convencional melhorada

4.1.3 Representação convencional interpolada (RCI)

Considera-se ainda uma outra representação para a derivada segunda dos deslocamentos, denominada aqui de representação convencional interpolada, pois, na dedução da sua expressão correspondente, faz-se uso da representação convencional e de interpolação (linear). Tal representação foi utilizada especificamente para a derivada u'' , nas extremidades $x=0$ e $x=L$ da barra. Com o auxílio da Figura 3.a, deduz-se então a seguinte expressão para f_i'' , no caso de i representar o nó da extremidade esquerda da barra:

$$f_i'' = 2f_{i+1}'' - f_{i+2}'' = \frac{2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{\lambda^2} \quad (5)$$

Pode-se também deduzir a expressão associada à extremidade direita da barra (ver Figura 3.b):

$$f_i'' = -f_{i-2}'' + 2f_{i-1}'' = \frac{-f_{i-3} + 4f_{i-2} - 5f_{i-1} + 2f_i}{\lambda^2} \quad (6)$$

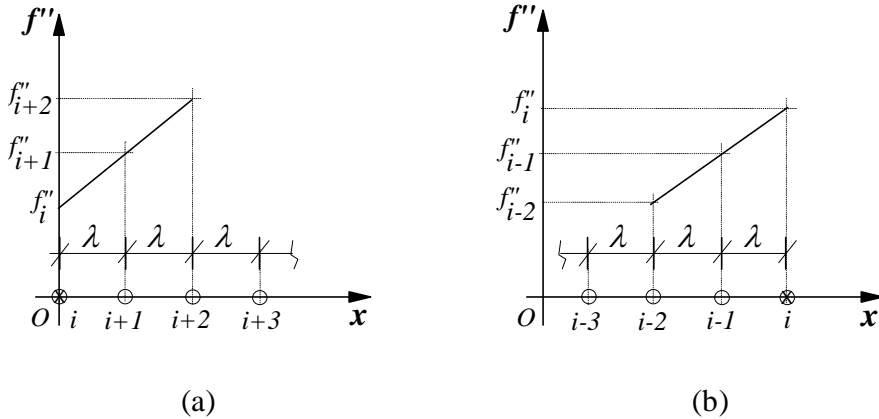


Figura 3 - Esquema para obtenção de f_i'' segundo a representação convencional interpolada:
a) Em $x=0$; b) Em $x=L$

4.1.4 Representação convencional com derivada explícita (RCDE)

Tal representação, como o nome indica, utiliza o conceito de representação convencional (para as derivadas primeira e segunda) e envolve explicitamente em sua expressão a derivada primeira, salientando-se que a mesma será aqui adotada especificamente para representar a derivada w'' nos nós extremos da barra; para o nó i da extremidade esquerda, considerando-se $i-1$ como um nó virtual associado a essa extremidade, escreve-se:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\lambda^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + (f_{i+1} - 2\lambda f_i')}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} (f_{i+1} - f_i - \lambda f_i') \quad (7)$$

tendo-se, analogamente, para o nó i da extremidade direita:

$$f_i'' = \frac{2}{\lambda^2} (f_{i-1} - f_i + \lambda f_i') \quad (8)$$

As expressões (5) a (8), como se observa, não envolvem a participação de nós virtuais.

4.1.5 Representação reduzida (RR)

Para avaliar a derivada primeira dos deslocamentos, utilizou-se também a denominada representação reduzida, a qual é expressa por:

$$f_m' = \frac{f_{i+1} - f_i}{\lambda} \quad (9)$$

onde se percebe que a derivada primeira é avaliada no ponto médio m do trecho limitado pelos nós i e $i+1$, como mostra a Figura 4.

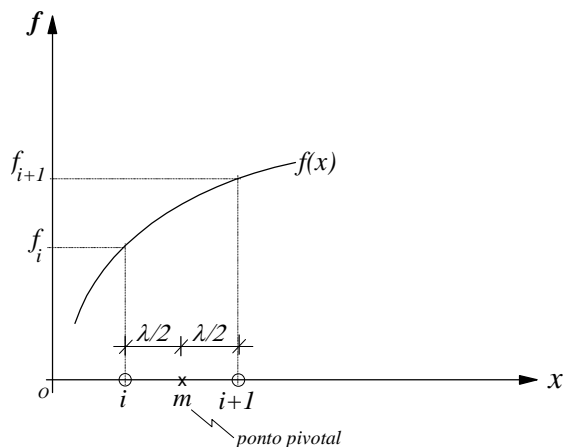


Figura 4 – Esquema para a representação reduzida da derivada primeira

4.2 Discretização da barra e sistemas de numeração dos deslocamentos

Estabeleceu-se para a barra a discretização uniforme explicitada na Figura 5, tendo-se um total de NN pontos nodais e $2NN+4$ deslocamentos associados a esses pontos. Sendo ND o número de subdivisões de comprimento λ da barra, segue-se que $NN=ND+1$. Incluem-se também na figura os NN trechos de integração, sendo que o primeiro e o último possuem metade do comprimento λ dos demais. Por fim, cabe observar que, no sistema de numeração global concebido para os deslocamentos, os dois primeiros, D_1 e D_2 , e os dois últimos, D_{2NN+3} e D_{2NN+4} , representam na realidade as derivadas u' e w' nos extremos $x=0$ e $x=L$ da barra, ao passo que os demais traduzem os deslocamentos u e w avaliados nos NN nós da barra.

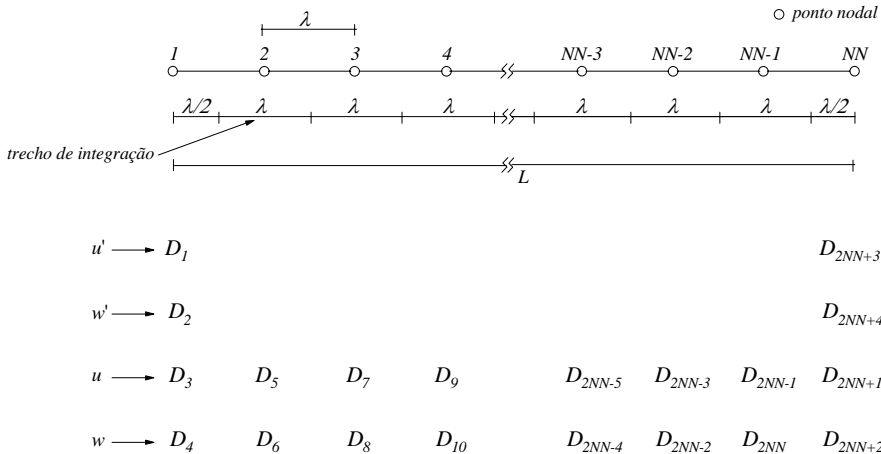


Figura 5 – Discretização e sistema de numeração global para os deslocamentos

Torna-se conveniente ainda instituir um sistema de numeração local para os deslocamentos, com o objetivo de facilitar a avaliação das contribuições individuais para δW_{int} e δW_{ext} dos NN trechos de integração. Nesse sistema, dependendo do

trecho de integração considerado, estão presentes 6 ou 10 deslocamentos a_i , conforme ilustra a Figura 6 para o caso de um trecho genérico (i) $3 \leq (i) \leq NN - 2$.

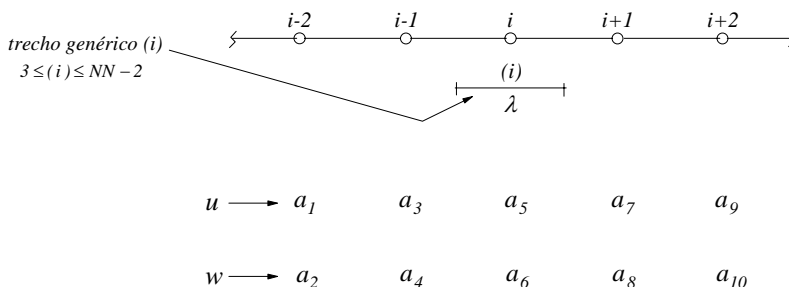


Figura 6 – Sistema de numeração local para os deslocamentos

Por fim, antes de se passar ao tratamento numérico das parcelas δW_{int} e δW_{ext} do ptv, deve-se salientar que, na avaliação das derivadas dos deslocamentos associadas a cada um dos NN trechos de integração, mostrou-se mais adequado, após uma série de testes realizados, o esquema estabelecido no Quadro 1.

Quadro 1 – Definição das representações em diferenças finitas utilizadas para as derivadas em cada um dos NN trechos de integração

| DERIVADA REQUERIDA | REPRESENTAÇÃO UTILIZADA | | | | |
|-----------------------|--|-----------|--------------------------|----------------|------------|
| | TRECHOS DE INTEGRAÇÃO $(1 \leq (i) \leq NN)$ | | | | |
| | $(i) = 1$ | $(i) = 2$ | $3 \leq (i) \leq NN - 2$ | $(i) = NN - 1$ | $(i) = NN$ |
| u' | RR | RC | RCM | RC | RR |
| w' | RR | RC | RCM | RC | RR |
| u'' | RCI | RC | RCM | RC | RCI |
| w'' | RCDE | RC | RCM | RC | RCDE |

4.3 Expressão numérica do trabalho virtual interno

A avaliação de δW_{int} segundo o tratamento numérico proposto, consiste em determinar o somatório das contribuições oriundas dos NN trechos de integração da barra, admitindo-se que as grandezas avaliadas nesses trechos sejam constantes em todo o seu comprimento.

Inicialmente, conforme estabelecido por Garcia (1987) e Lima (1995), procura-se reescrever a expressão (1) separando os termos da integração em grupos de lineares, quadráticos e cúbicos nas derivadas dos deslocamentos, resultando então:

$$\delta W_{int} = \delta W_{int}^{LIN} + \delta W_{int}^{QUA} + \delta W_{int}^{CUB} \quad (10)$$

onde

$$\delta W_{int}^{LIN} = \int_0^L (EAu' \delta u' + EI_y w'' \delta w'') dx \quad (11.a)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{QUA} = \int_0^L \left\{ \left[\frac{EA}{2} (3u'^2 + w'^2) - EI_y w''^2 \right] \delta u' + (EAu' w' + EI_y u'' w'') \delta w' - \right. \\ \left. - EI_y w' w'' \delta u'' + EI_y (2u' w'' - u'' w') \delta w'' \right\} dx \end{aligned} \quad (11.b)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{CUB} = \int_0^L \left\{ \left[\frac{EA}{2} (u'^3 + u' w'^2) - EI_y (u' w''^2 - u'' w' w'') \right] \delta u' + \right. \\ \left. + \left[\frac{EA}{2} (u'^2 w' + w'^3) \right] \delta w' + EI_y (u'' w'^2 - u' w' w'') \delta u'' + \right. \\ \left. + EI_y (u'^2 w'' - u' u'' w') \delta w'' \right\} dx \end{aligned} \quad (11.c)$$

Com base nessas expressões, parte-se então para o cálculo discretizado de δW_{int} substituindo a integração analítica por um somatório de contribuições do tipo:

$$\delta W_{int}^{LIN} = \sum_{i=1}^{NN} \delta W_{int}^{LIN} (i) \quad (12.a)$$

$$\delta W_{int}^{QUA} = \sum_{i=1}^{NN} \delta W_{int}^{QUA}(i) \quad (12.b)$$

$$\delta W_{int}^{CUB} = \sum_{i=1}^{NN} \delta W_{int}^{CUB}(i) \quad (12.c)$$

onde $\delta W_{int}^{LIN}(i)$, $\delta W_{int}^{QUA}(i)$ e $\delta W_{int}^{CUB}(i)$ representam a contribuição do trecho de integração (i) para o trabalho virtual interno total da barra relativamente aos termos lineares, quadráticos e cúbicos nas derivadas dos deslocamentos.

Levando-se em consideração os aspectos discutidos no item anterior, relacionados à discretização da barra, aos sistemas de numeração global e local para os deslocamentos e, finalmente, quanto à definição das representações em diferenças finitas utilizadas em cada trecho de integração, conforme Quadro 1, deduzem-se as seguintes expressões para δW_{int}^{LIN} , δW_{int}^{QUA} e δW_{int}^{CUB} :

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{LIN} = & \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} A_1^{LIN}(p,q) D_q \delta D_p + \\ & + \left[\sum_{p=1}^6 \sum_{q=1}^6 A_2^{LIN}(p,q) D_{2i+q-2} \delta D_{2i+p-2} \right]_{i=2 \text{ e } NN-1} + \\ & + \sum_{i=3}^{NN-2} \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} A_3^{LIN}(p,q) D_{2i+q-4} \delta D_{2i+p-4} + \\ & + \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} A_4^{LIN}(p,q) D_{2NN+q-6} \delta D_{2NN+p-6} \end{aligned} \quad (13.a)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{QUA} = & \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} \sum_{r=q}^{10} A_1^{QUA}(p,q,r) D_q D_r \delta D_p + \\ & + \left[\sum_{p=1}^6 \sum_{q=1}^6 \sum_{r=q}^6 A_2^{QUA}(p,q,r) D_{2i+q-2} D_{2i+r-2} \delta D_{2i+p-2} \right]_{i=2 \text{ e } NN-1} + \\ & + \sum_{i=3}^{NN-2} \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} \sum_{r=q}^{10} A_3^{QUA}(p,q,r) D_{2i+q-4} D_{2i+r-4} \delta D_{2i+p-4} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} \sum_{r=q}^{10} A_4^{QUA}(p, q, r) D_{2NN+q-6} D_{2NN+r-6} \delta D_{2NN+p-6} \quad (13.b)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^{CUB} = & \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} \sum_{r=q}^{10} \sum_{s=r}^{10} A_j^{CUB}(p, q, r, s) D_q D_r D_s \delta D_p + \\ & + \left[\sum_{p=1}^6 \sum_{q=1}^6 \sum_{r=q}^6 \sum_{s=r}^6 A_2^{CUB}(p, q, r, s) D_{2i+q-2} D_{2i+r-2} D_{2i+s-2} \delta D_{2i+p-2} \right]_{i=2 \text{ e } NN-1} + \\ & + \sum_{i=3}^{NN-2} \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} \sum_{r=q}^{10} \sum_{s=r}^{10} A_3^{CUB}(p, q, r, s) D_{2i+q-4} D_{2i+r-4} D_{2i+s-4} \delta D_{2i+p-4} + \\ & + \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} \sum_{r=q}^{10} \sum_{s=r}^{10} A_4^{CUB}(p, q, r, s) D_{2NN+q-6} D_{2NN+r-6} D_{2NN+s-6} \delta D_{2NN+p-6} \quad (13.c) \end{aligned}$$

onde os coeficientes $A_j^{LIN}(p, q)$, $A_j^{QUA}(p, q, r)$ e $A_j^{CUB}(p, q, r, s)$, $j = 1 a 4$, são funções das propriedades geométricas e do material da barra, e também do espaçamento nodal λ .

4.4 Expressão numérica do trabalho virtual externo

Pode ser escrita, a partir de (2), a seguinte expressão para avaliar numericamente o trabalho virtual das forças externas:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \sum_{i=1}^{NN} [q_x(i) \delta D_{2i+1} + q_z(i) \delta D_{2i+2}] \lambda_i + \\ & + \bar{F}_{xL} \delta D_{2NN+1} - \bar{F}_{x0} \delta D_3 + \bar{F}_{zL} \delta D_{2NN+2} - \bar{F}_{z0} \delta D_4 + \\ & + \bar{M}_L D_{2NN+4} \delta D_{2NN+3} - \bar{M}_0 D_2 \delta D_1 - \\ & - \bar{M}_L (1 + D_{2NN+3}) \delta D_{2NN+4} + \bar{M}_0 (1 + D_1) \delta D_2 \quad (14) \end{aligned}$$

sendo $q_x(i)$ e $q_z(i)$ as cargas distribuídas, segundo os eixos X e Z , nos NN pontos nodais definidos para a barra, admitindo-se, para efeito de integração numérica, que essas cargas são constantes em cada trecho de integração considerado.

4.5 Introdução das condições de contorno

Coerentemente com o método numérico utilizado, devem ser prescritas apenas as condições de contorno cinemáticas, as quais podem ser assim resumidas (LIMA; GARCIA (2002)):

a) Deslocamento axial u impedido ($u = 0$):

$$x=0: D_3 = 0 \rightarrow \delta D_3 = 0 \quad (15.a)$$

$$x = L: D_{2NN+1} = 0 \rightarrow \delta D_{2NN+1} = 0 \quad (15.b)$$

b) Deslocamento transversal w impedido ($w = 0$):

$$x = 0: D_4 = 0 \rightarrow \delta D_4 = 0 \quad (16.a)$$

$$x = L: D_{2NN+2} = 0 \rightarrow \delta D_{2NN+2} = 0 \quad (16.b)$$

c) Rotação θ , em torno de Y , impedida ($\theta = 0 \Rightarrow w' = 0$):

$$x = 0: D_2 = 0 \rightarrow \delta D_2 = 0 \quad (17.a)$$

$$x = L: D_{2NN+4} = 0 \rightarrow \delta D_{2NN+4} = 0 \quad (17.b)$$

4.6 Resolução do sistema de equações algébricas não lineares

Igualando as expressões (10) e (14) dos trabalhos virtuais interno e externo, respectivamente, introduzindo as condições

de contorno cinemáticas apresentadas no item anterior, e, finalmente, considerando que as variações associadas aos deslocamentos incógnitos são arbitrárias, resulta um sistema de n equações algébricas não lineares para o problema, expresso por:

$$F_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0 \quad (18)$$

onde F_i representa cada uma dessas n equações do sistema e $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ designam os deslocamentos efetivamente desconhecidos para a barra. Cabe destacar que os deslocamentos D_1 e D_{2NN+3} , traduzindo as derivadas u' nos nós 1 e NN , respectivamente, nunca são requeridos pela análise, sendo mantidos, com valor nulo, apenas para facilitar a programação.

Para determinar a solução do sistema não linear foi usado o processo iterativo de Newton-Raphson (na sua forma padrão), aferindo-se a convergência através da comparação entre as normas das soluções correspondentes a duas iterações sucessivas diante de uma tolerância pré-estabelecida.

Com base no tratamento numérico desenvolvido no presente tópico, foi então elaborado um programa para microcomputador, escrito em linguagem Fortran, o qual possibilitou a obtenção dos resultados numéricos expostos no tópico subsequente.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Apresentam-se em seguida dois exemplos de sistemas estruturais que foram examinados pelo programa, os correspondentes resultados obtidos e as respectivas análises realizadas. Cabe ressaltar que tais exemplos foram extraídos de Garcia (1987), possibilitando assim uma confrontação dos resultados oriundos da metodologia numérica aqui empregada frente aos obtidos por aquele autor mediante os tratamentos por elementos finitos e diferenças finitas tradicionais.

5.1 Apresentação dos Exemplos

Explicitam-se, através da Figura 7, os esquemas estruturais representativos dos dois exemplos escolhidos, sendo ambas as barras de comprimento $L = 100 \text{ cm}$, seção transversal quadrada de lado $1,0 \text{ cm}$, rigidez axial $EA = 24000 \text{ kN}$ e rigidez flexional $EI = 2000 \text{ kNcm}^2$.

5.2 Exemplo 1

Neste exemplo, o interesse se concentra na resposta do programa para os deslocamentos $u(L)$ e $w(L/2)$. Fazendo-se então a carga F crescer de 0 a 24 kN , com passos sucessivos de $0,5 \text{ kN}$, admitindo-se uma tolerância de 10^{-6} para o processo iterativo de Newton-Raphson e, por fim, admitindo uma discretização da barra em 28 subdivisões iguais, ou seja, $\lambda = L / 28$ geram-se os resultados explicitados nas colunas mdfe da Tabela 1, os quais podem ser também visualizados através das curvas da Figura 8.

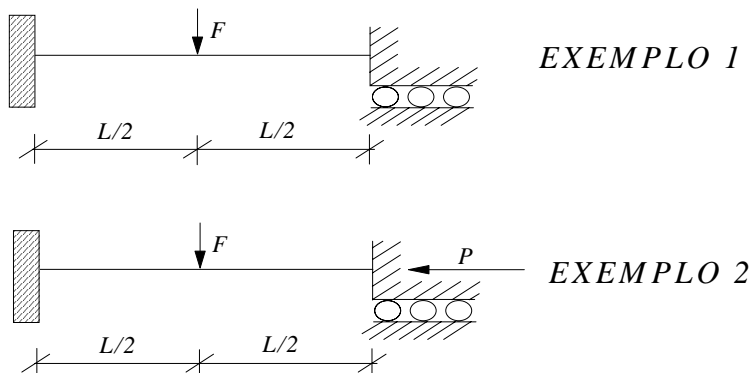


Figura 7 – Esquemas estruturais dos exemplos analisados

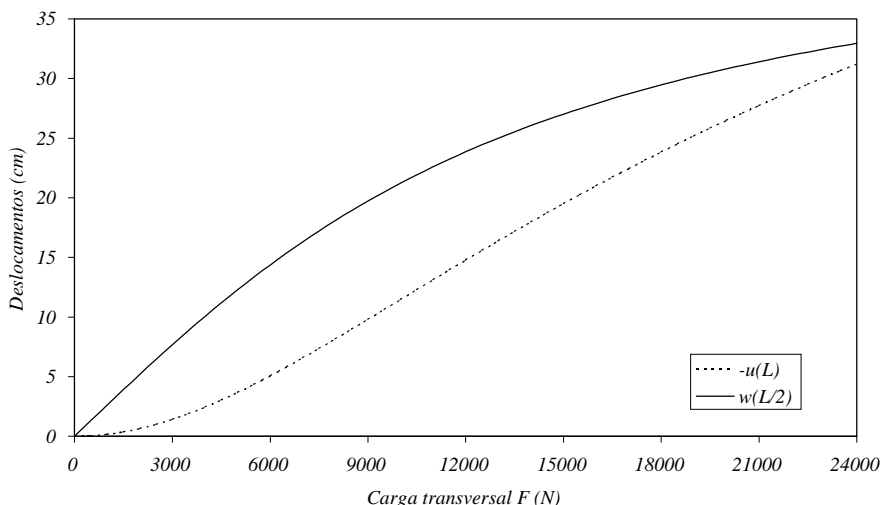


Figura 8 – Exemplo 1: curvas carga transversal F - deslocamentos $u(L)$ e $w(L/2)$

Passando-se à análise desses resultados, nota-se inicialmente que, na Tabela 1, foram também incluídas as soluções obtidas por Garcia (1987) para o mesmo problema, tanto por intermédio do mef, com a consideração de 40 elementos iguais na discretização, como por diferenças finitas tradicionais (dft), tomando-se 29 nós na barra. Como se observa, este último foi também o número de nós escolhido para o tratamento por diferenças finitas energéticas, buscando-se assim uma comparação mais realista entre essas duas últimas técnicas numéricas.

Nessa tabela foram também explicitadas, entre parênteses, as diferenças percentuais determinadas entre a solução obtida com o mdfe, perante aquelas oriundas dos tratamentos pelo mef e por dft, respectivamente. Considerando que essas diferenças, no geral, situaram-se abaixo de 1%, conclui-se que os resultados obtidos pelo mdfe podem ser classificados como plenamente satisfatórios. Pode-se ainda constatar que o deslocamento axial se aproximou mais das avaliações do mef (teoricamente

as mais precisas, pelo grau de refinamento considerado na discretização), ao passo que o deslocamento transversal apresentou maior proximidade com a correspondente resposta em dft.

Tabela 1 – Exemplo 1: deslocamentos $u(L)$ e $w(L/2)$, para diversos valores da carga transversal F , e as correspondentes soluções obtidas por * Garcia (1987)

| F (N) | $-u(L)$ (cm) | | | $w(L/2)$ (cm) | | |
|---------|----------------------|--------------------|-------------------------|----------------------|--------------------|-------------------------|
| | mef^* (40elem.) | dft^* (29nós) | $mdfe$ (29 nós) | mef^* (40elem.) | dft^* (29nós) | $mdfe$ (29 nós) |
| 2000 | 0,64 | 0,65 | 0,64 (0% e -1,5%) | 5,15 | 5,18 | 5,19 (0,8% e 0,2%) |
| 4000 | 2,42 | 2,45 | 2,44 (0,8% e -0,4%) | 9,99 | 10,05 | 10,05 (0,6% e 0%) |
| 8000 | 8,14 | 8,22 | 8,17 (0,4% e -0,6%) | 18,01 | 18,11 | 18,09 (0,4% e -0,1%) |
| 12000 | 14,73 | 14,87 | 14,78 (0,3% e -0,6%) | 23,76 | 23,88 | 23,86 (0,4% e -0,1%) |
| 16000 | 20,95 | 21,13 | 21,01 (0,3% e -0,6%) | 27,80 | 27,93 | 27,91 (0,4% e -0,1%) |
| 20000 | 26,41 | 26,64 | 26,49 (0,3% e -0,6%) | 30,69 | 30,84 | 30,81 (0,4% e -0,1%) |
| 24000 | 31,13 | 31,38 | 31,23 (0,3% e -0,5%) | 32,83 | 32,98 | 32,96 (0,4% e -0,1%) |

Pela natureza não linear do problema, é importante também destacar que o número máximo de iterações observadas no processo de Newton-Raphson não excedeu a cinco. E, por fim, ressalta-se que as curvas traduzindo os resultados de Garcia (1987) não foram plotadas na Figura 8 por se sobreporem às curvas apresentadas.

5.3 Exemplo 2

O segundo exemplo envolve um problema de flambagem, com investigação do comportamento pós-crítico. No esquema estrutural da Figura 7, a carga axial P é acompanhada de uma pequena força perturbadora transversal F , introduzida tão-somente para dar início ao processo de flexão da barra. Tal força possui valor constante de $0,2 N$, sendo retirada quando P atinge o nível de $8000 N$ (valor este logo acima da carga

crítica teórica de $7896 N$). A carga axial, por sua vez, cresce de 0 até $20 kN$, com passos variados ao longo da análise, conforme se define adiante. Além disso, adota-se a mesma discretização para a barra do exemplo anterior, $\lambda = L/28$ e admite-se uma tolerância de 10^{-7} para o processo iterativo. Determinam-se então, para diversos valores de P , os deslocamentos $u(L)$ e $w(L/2)$, resultados esses, juntamente com os de Garcia (1987), explicitados numericamente na Tabela 2 e, graficamente, na Figura 9.

Observando-se as diferenças percentuais na tabela, conclui-se que os resultados obtidos pelo mdfe apresentam, em relação aos demais, divergências significativas apenas na região da carga crítica, onde tais diferenças atingem valores consideráveis (ver a solução para a carga de $7900 N$, por exemplo). Para visualizá-las, resolveu-se, na Figura 9, adicionar às curvas obtidas pelo mdfe os pontos representativos das soluções pelo mef e por dft. Pode-se notar que todos esses pontos situam-se praticamente sobre as curvas traçadas na figura, evidenciando, portanto, que as aparentes discrepâncias entre as soluções numéricas no trecho (praticamente horizontal) junto à carga crítica são irrelevantes para fins de construção dos gráficos.

Outro aspecto, típico dos problemas de estabilidade elástica, diz respeito às dificuldades de convergência encontradas no processo iterativo de Newton-Raphson, concentradas, no presente exemplo, em dois trechos particulares: nas imediações das cargas de $7,9 kN$ e de $14,0 kN$. Tais dificuldades podem ser associadas à proximidade da carga crítica, no caso da primeira carga, e à mudança observada no sentido de crescimento de $w(L/2)$, no caso da segunda carga, tendo sido contornadas, após sucessivos testes, dividindo-se a carga axial total de $20 kN$ em quatro intervalos consecutivos de $5 kN$, com passos, respectivamente, de $500 N$, $50 N$, $250 N$ e $500 N$. Com esse procedimento, puderam ser então perfeitamente estabelecidos os caminhos pré e pós-crítico para o presente exemplo, obtendo-se um número máximo de 14 iterações (quando P atingiu o nível de $8 kN$).

Tabela 2 – Exemplo 2: deslocamentos $u(L)$ e $w(L/2)$ para diversos valores da carga axial P , e as correspondentes soluções obtidas por * Garcia (1987)

| P (N) | $-u(L)$ (cm) | | | $w(L/2)$ (cm) | | |
|---------|-----------------------|---------------------|---------------------------|-----------------------|---------------------|---------------------------|
| | mef^* (40 elem.) | dft^* (29 nós) | $mdfe$ (29 nós) | mef^* (40 elem.) | dft^* (29 nós) | $mdfe$ (29 nós) |
| 7500 | 0,031 | 0,031 | 0,031 (0%, 0%) | 0,010 | 0,011 | 0,011 (10% e 10%) |
| 7800 | 0,033 | 0,033 | 0,033 (0%, 0%) | 0,042 | 0,046 | 0,050 (19% e 9%) |
| 7850 | 0,033 | 0,033 | 0,033 (0%, 0%) | 0,09 | 0,11 | 0,13 (44% e 18%) |
| 7900 | 0,18 | 0,37 | 0,49 (172% e 32%) | 2,47 | 3,72 | 4,30 (74% e 16%) |
| 8000 | 2,64 | 2,83 | 2,85 (8,0% e 0,7%) | 10,20 | 10,55 | 10,62 (4% e 0,7%) |
| 8200 | 7,42 | 7,59 | 7,46 (0,5% e 11,7%) | 16,91 | 17,08 | 16,98 (0,4% e -0,6%) |
| 8500 | 14,12 | 14,25 | 14,02 (-0,7% e -1,6%) | 22,84 | 22,92 | 22,80 (-0,2% e -0,5%) |
| 9000 | 24,17 | 24,27 | 24,03 (-0,6 e 1%) | 28,86 | 28,87 | 28,82 (-0,1% e -0,2%) |
| 10000 | 40,94 | 40,97 | 40,96 (0,05% e -0,2%) | 35,17 | 35,14 | 35,22 (0,1% e 0,2%) |
| 12000 | 65,25 | 65,21 | 65,60 (0,5% e 0,6%) | 39,65 | 39,58 | 39,70 (0,1% e 0,3%) |
| 14000 | 81,91 | 81,89 | 82,35 (0,5% e -0,6%) | 40,38 | 40,30 | 40,37 (-0,02% e 0,2%) |
| 16000 | 94,04 | 94,04 | 94,35 (0,3% e 0,3%) | 39,85 | 39,76 | 39,77 (-0,2% e 0,03%) |
| 18000 | 103,25 | 103,28 | 103,32 (0,07% e 0,04%) | 38,84 | 38,74 | 38,73 (-0,3% e -0,03%) |
| 20000 | 110,49 | 110,56 | 110,26 (-0,2% e -0,3%) | 37,67 | 37,56 | 37,55 (-0,3% e -0,03%) |

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme estabelecido na Introdução, o objetivo desta pesquisa foi o de verificar a eficácia do tratamento numérico por diferenças finitas energéticas, quando aplicado à formulação apresentada por Garcia (1987) para a flexão de barras prismáticas

no âmbito de grandes rotações (considerando-se, por simplicidade, somente o caso de solicitações estáticas), em vista de que o referido autor, na sua abordagem por diferenças finitas tradicionais, não logrou êxito quando essas foram diretamente aplicadas às equações diferenciais de quarta ordem para o problema.

Nesse sentido, primeiramente desenvolveu-se a formulação analítica para o problema, sendo instituídas as correspondentes expressões para o trabalho virtual das forças internas e das forças externas, obtendo-se em seguida, com a utilização do ptv, as equações diferenciais e condições de contorno para o problema, conforme visto em Lima e Garcia (2002).

No presente trabalho, passou-se então à formulação numérica por diferenças finitas energéticas, apresentando-se, de início, as representações em diferenças finitas adotadas para as derivadas dos deslocamentos, após o que foram instituídas as expressões numéricas para o trabalho virtual das forças internas e das forças externas, introduzidas as condições de contorno cinemáticas e discutida a resolução do sistema não linear de equações algébricas oriundo da aplicação do ptv. Por fim, foram apresentados dois exemplos de aplicação de modo a verificar a eficácia do tratamento numérico proposto, mediante comparação com os resultados obtidos por Garcia (1987) usando diferenças finitas tradicionais e elementos finitos.

Dessas análises, pode-se concluir que o tratamento por diferenças finitas energéticas mostrou-se plenamente adequado, tendo em vista a boa precisão das respostas obtidas comparativamente às soluções pelo mef e por dft.

Cabe, por outro lado, destacar que o processo iterativo de Newton-Raphson teve uma vez mais confirmada a sua potencialidade; mesmo nas regiões próximas à carga crítica, ou para outras ao longo do caminho pós-crítico, houve apenas necessidade de um ajuste adequado para o passo de carga.

Para finalizar, ressalta-se ainda como aspecto positivo o fato de um problema fortemente não linear, como o aqui abordado, ter sido tratado com pleno êxito pelo método das diferenças finitas energéticas, confirmando assim, uma vez mais, o grande potencial dessa técnica numérica alternativa para análise estrutural.

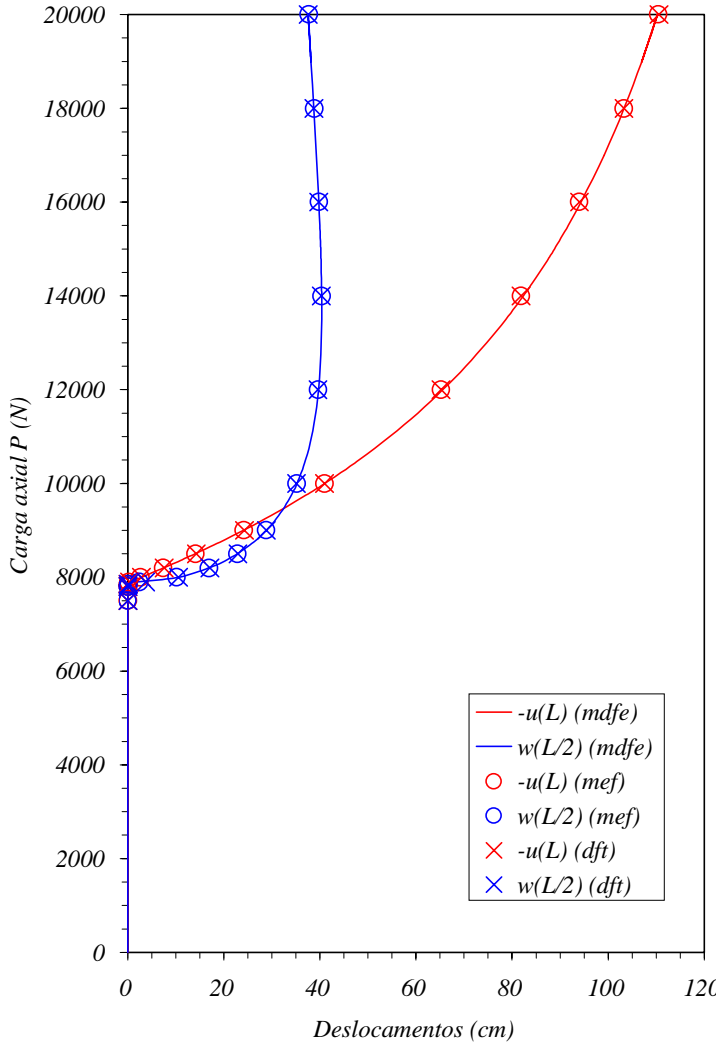


Figura 9 – Exemplo 2: curvas carga axial P - deslocamentos $u(L)$ e $w(L/2)$

6 REFERÊNCIAS

GARCIA, L. F. T. **Uma contribuição ao estudo da flexão de barras com forte não-linearidade geométrica.** 1987. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

LIMA, J. M. F. **Análise dinâmica da flexão de barras com não-linearidade geométrica utilizando diferenças finitas energéticas.** 1995. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

LIMA, J. M. F.; GARCIA, L. F. T. Princípio dos trabalhos virtuais aplicado à flexão de barras com forte não linearidade geométrica. **Sitientibus**, n. 26, p. 111-130, 2002.