

PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS APLICADO À FLEXÃO DE BARRAS COM FORTE NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

*José Mário Feitosa Lima **
*Luiz Fernando T. Garcia ***

RESUMO — *No presente trabalho, à luz do modelo apresentado por GARCIA (1987) para a flexão dinâmica de barras prismáticas com forte não linearidade geométrica, são instituídas inicialmente as expressões dos trabalhos virtuais interno e externo, as quais, em publicação posterior, servirão de base a um tratamento numérico do problema por diferenças finitas energéticas. Deduzem-se, ainda, como consequência da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, as equações diferenciais e as condições de contorno do problema.*

PALAVRAS-CHAVE: *Flexão de Barras; Análise Dinâmica; Não Linearidade Geométrica.*

ABSTRACT — *In the current work, based on a model presented by GARCIA (1987) for bending problems of prismatic bars with strong geometric non-linearity and dynamic loads, the equations for internal and external virtual work were developed. In a future publication, these equations will serve as a basis for the numerical treatment of the problem in question by the energetic finite difference method. Also in the present work the differential equations and boundary conditions for the problem are developed from the principle of virtual work.*

KEY WORDS: *Bending of Bars; Dynamic Analysis; Geometric Non Linearity.*

* Prof. Assistente. DTEC (UEFS). Engenheiro Civil. Mestre em Engenharia Civil, COPPE (UFRJ). E-mail: jmflima@uefs.br
Universidade Estadual de Feira de Santana – Dep. de Tecnologia.
Tel./Fax (75) 224-8056 – BR 116 – KM 03, Campus - Feira de Santana/BA – CEP 44031-460.

** Engenheiro Civil. Doutor em Engenharia Civil, COPPE (UFRJ). Prof. Adjunto - Programa de Engenharia Civil (PEC) da COPPE (UFRJ). E-mail: taborda@coc.ufrj.br

1 INTRODUÇÃO

Em sua tese de doutorado, GARCIA (1987) apresentou um modelo estrutural aplicado ao comportamento de barras prismáticas sujeitas à flexão plana, considerando tanto cargas dinâmicas quanto forte não linearidade geométrica. Nesse trabalho, o referido autor formulou, analiticamente, o problema, instituindo as equações diferenciais e correspondentes condições de contorno.

Para tanto, visando assegurar uma maior confiabilidade no processo analítico de obtenção dessas equações, GARCIA (1987) tirou partido de dois procedimentos distintos, quais sejam: o princípio de D' Alembert aplicado ao equilíbrio dinâmico de barras, estratégia clássica e largamente utilizada por diversos autores, a exemplo de CLOUGH e PENZIEN (1993) e PAZ (1985); e o princípio de Hamilton, que tem a vantagem de fornecer, de forma natural e consistente, as equações diferenciais e, simultaneamente, as condições de contorno do problema.

Posteriormente, ainda no mesmo trabalho, GARCIA (1987) implementou um tratamento numérico sobre as equações diferenciais do problema, simplificadas para o caso de amortecimento nulo, utilizando diferenças finitas tradicionais, para representar as derivadas dos deslocamentos no espaço, e o método da aceleração constante, visando avaliar as derivadas no tempo. Além disso, uma segunda abordagem utilizando elementos finitos, conjuntamente com o método da aceleração constante, foi também apresentada.

Nessa fase do trabalho, mais especificamente, quando da tentativa de abordar o problema por diferenças finitas, GARCIA (1987) destacou um problema que serviu de inspiração para se conceber e empreender uma pesquisa no Departamento de Tecnologia da UEFS, cujos resultados propiciaram a concepção da presente publicação. O citado autor relatou que, ao trabalhar com as equações diferenciais gerais de quarta ordem do problema, não obteve resultados numéricos satisfatórios, traduzidos, principalmente, pela extrema dificuldade de convergência no processo iterativo de Newton-Raphson, mesmo

em exemplos com fraca não linearidade geométrica. Para resolver esse impasse, gerou duas equações íntegro-diferenciais para o problema, através de uma prévia integração nas equações diferenciais originais. Em conseqüência disso, o tratamento numérico passou a envolver, também, integração numérica. Por outro lado, a redução da ordem da derivada mais alta no espaço, de quarta para terceira ordem, propiciou um aspecto favorável, já que derivadas de ordem mais baixa tendem a ter representações em diferenças finitas mais precisas.

Com o auxílio dos dois tratamentos numéricos citados anteriormente (diferenças finitas e elementos finitos), o modelo de GARCIA (1987) pôde então ser aferido mediante o estudo de alguns casos de carregamento e de vinculação na barra, confrontando-se as soluções numéricas entre si e, por vezes, comparando-as com soluções analíticas disponíveis.

No presente artigo, pretendem-se instituir, para o modelo de GARCIA (1987), as expressões dos trabalhos virtuais interno e externo visando um posterior tratamento numérico alternativo por diferenças finitas energéticas, traduzido pela utilização, na expressão do princípio dos trabalhos virtuais (ptv), de representações em diferenças finitas para as derivadas no espaço. Tal abordagem já foi implementada e testada com sucesso por LIMA (1995), para um caso particular do modelo de GARCIA (1987). Além disso, como conseqüência direta da aplicação do ptv, são aqui obtidas as equações diferenciais e as condições de contorno estáticas e cinemáticas para o problema.

2 SISTEMA DE REFERÊNCIA

Conforme estabelecido por GARCIA (1987), adota-se o sistema cartesiano de referência X , Y e Z , observando que o eixo X coincide com o próprio eixo da barra em sua configuração indeformada, e que os demais eixos, Y e Z , estão contidos no plano da seção da extremidade esquerda da barra, conforme explicita a Figura 1:

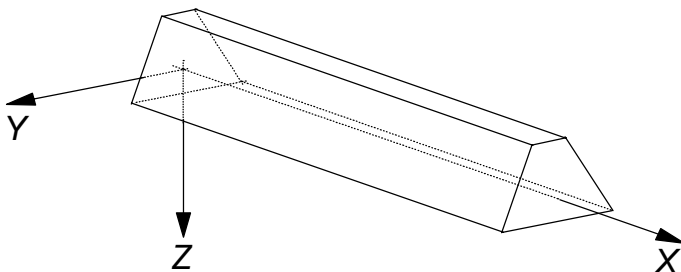


Figura 1 - Sistema de referência adotado

3 HIPÓTESES BÁSICAS

As hipóteses consideradas para o problema podem ser apresentadas, segundo a sua natureza, em dois grupos:

A) HIPÓTESES GEOMÉTRICAS

1. Admite-se que, durante a flexão, ocorrem grandes rotações, porém as deformações específicas e distorções mantêm-se pequenas em relação à unidade;

2. As seções transversais da barra permanecem, com a flexão, planas e normais ao eixo (Hipótese de Navier-Bernoulli). Além disso, admite-se que a seção permanece indeformada;

3. Considera-se que a barra é prismática e que apresenta um plano vertical de simetria **XZ**, no qual se supõe que atuam todos os carregamentos, acarretando, assim, flexão plana;

B) HIPÓTESES MECÂNICAS

4. Considera-se que o material da barra é visco-elástico, comportando-se, segundo a lei constitutiva do sólido de Kelvin-Voigt;

5. As componentes normais de tensão σ_y e σ_z são admitidas pequenas, quando comparadas com σ_x

4 CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Com base na Figura 2 e atentando-se para as hipóteses geométricas, o deslocamento de um ponto genérico B da barra pode ser expresso em termos das componentes u_1 , v_1 e w_1 (associadas aos eixos X , Y e Z , respectivamente, e admitidas como positivas quando no mesmo sentido destes) por:

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, t) - z \operatorname{sen} \theta \quad (1.a)$$

$$v_1(x, y, z, t) = 0 \quad (1.b)$$

$$w_1(x, y, z, t) = w(x, t) - z(1 - \cos \theta) \quad (1.c)$$

onde $u(x, t)$ e $w(x, t)$ são as translações segundo os eixos X e Z de um ponto B_0 localizado sobre o eixo da barra, e com $\theta = \theta(x, t)$ representando a rotação do eixo nesse mesmo ponto, admitida como positiva quando corresponde a um giro de X para Z .

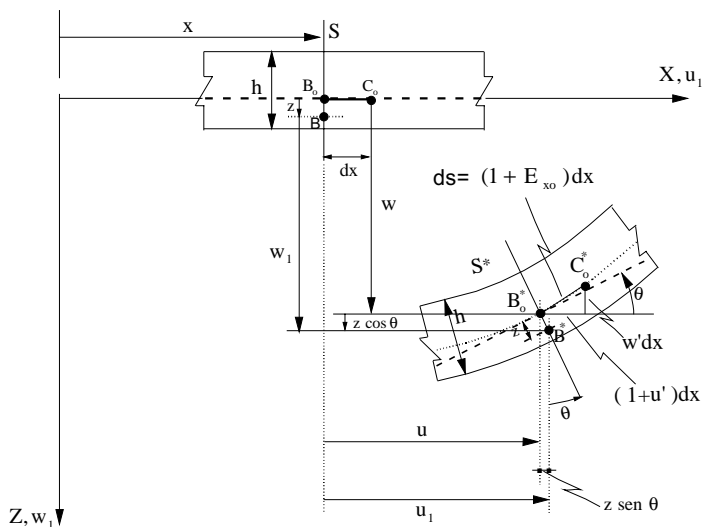


Figura 2 - Deslocamentos u_1 , w_1 e θ num certo instante t

Extraem-se ainda, da Figura 2, as seguintes relações:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{w'}{1 + E_{xo}} \approx w' \quad (2.a)$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{1 + u'}{1 + E_{xo}} \approx 1 + u' \quad (2.b)$$

$$\operatorname{tan} \theta = \frac{w'}{1 + u'} \quad (2.c)$$

onde o termo $E_{xo} = \frac{ds - dx}{dx}$ que representa a deformação específica da fibra elementar $B_o C_o$ do eixo da barra, foi desprezado em virtude da premissa de pequenas deformações específicas em presença da unidade.

4.1 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

Em atendimento à hipótese 1, são consideradas as relações deformação-deslocamento gerais da Elasticidade Não Linear, as quais, em virtude da hipótese 2, que acarreta a nulidade das componentes ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} , reduzem-se apenas à componente ε_x assim expressa:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3)$$

Substituindo-se as expressões (1) em (3), e operando, ter-se-á:

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} w'^2 - z\theta' \operatorname{cos} \theta - z\theta' u' \operatorname{cos} \theta - z\theta' w' \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} z^2 \theta'^2 \quad (4)$$

Com o uso das expressões (2a) e (2b), pode-se reescrever a expressão anterior na forma seguinte:

$$\varepsilon_x = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} - z\theta' + \frac{z^2\theta'^2}{2}. \quad (5)$$

Mas, face à hipótese 1, o último termo nesta última pode ser desprezado em presença de $z\theta'$, resultando finalmente para ε_x :

$$\varepsilon_x = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} - z\theta' \quad (6)$$

Observando-se que o conjunto dos três primeiros termos de (6) pode ser identificado como a deformação específica ε_{x0} de uma fibra elementar do eixo da barra, a componente ε_x fica então escrita na forma mais compacta:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\theta' \quad (7)$$

com $\varepsilon_{x0} \cong E_{x0} = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{w'^2}{2}$.

4.1.1 Relação Constitutiva

Considerando-se a hipótese 4, a lei constitutiva tomada por GARCIA (1987), correspondente ao sólido de Kelvin-Voigt, pode ser escrita como segue:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \eta\dot{\varepsilon}_x \quad (8)$$

onde E e η representam propriedades do material da barra, sendo a primeira grandeza o módulo de elasticidade longitudinal e a segunda, o coeficiente de viscosidade.

Introduzindo em (8) a expressão de ε_x dada em (6), resulta para σ_x

$$\sigma_x = E \left(u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} - z\theta' \right) + \eta \left[(1 + u')\dot{u}' + w'\dot{w}' - z\dot{\theta}' \right] \quad (9)$$

4.1.2 Esforços Solicitantes em Função dos Deslocamentos

Os esforços solicitantes diretamente requeridos pela formulação, M_y , e N , respectivamente o momento fletor em torno do eixo Y e o esforço normal, são explicitados, em conjunto com o esforço cortante Q , todos com os seus sentidos positivos, na Figura 3.

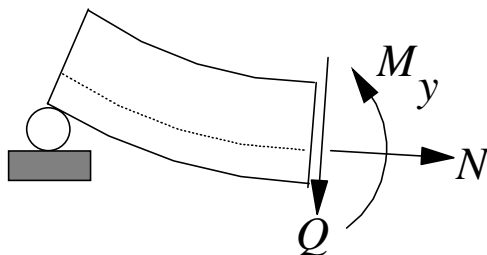


Figura 3 - Esforços solicitantes numa seção genérica da barra

A avaliação de N e M_y é feita recorrendo-se às definições clássicas para esses esforços, como resultantes de tensões numa seção transversal genérica de área A da barra:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (10.a)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad (10.b)$$

Mediante substituição da expressão (9) de σ_x , e procedendo à integração, obtém-se:

$$N = EA \left(u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} \right) + \eta A [(1 + u')\dot{u}' + w'\dot{w}'] \quad (11.a)$$

$$M_y = -EI_y \theta' - \eta I_y \dot{\theta}' \quad (11.b)$$

que são, portanto, as expressões para o esforço normal e o momento fletor em termos dos deslocamentos, com a grandeza I_y representando o momento de inércia da seção em relação ao eixo Y .

Ressalte-se que, embora o esforço cortante não participe diretamente da formulação aqui apresentada, pode-se, a partir do equilíbrio dinâmico de um elemento de barra, estabelecer, para o mesmo, a seguinte expressão:

$$Q = M'_y + \mu I_y \ddot{\theta} = -EI_y \theta'' - \eta I_y \dot{\theta}'' + \mu I_y \ddot{\theta} \quad (12)$$

onde a grandeza μ é a massa específica do material da barra e o termo $\mu I_y \ddot{\theta}$ representa a força generalizada de inércia de rotação por unidade de comprimento, f_{xz} , a qual será introduzida posteriormente, quando da avaliação da parcela do trabalho virtual externo δW_{ext} .

4.2 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O ptv estabelece a igualdade entre os trabalhos virtuais das forças internas δW_{int} e externas δW_{ext} , ou seja,

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad \text{ou} \quad \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad (13)$$

Nos dois subitens a seguir, desenvolvem-se, individualmente essas duas parcelas do ptv, tendo como objetivo principal determinar as suas expressões que, em trabalho posterior, serão tomadas como base para o tratamento numérico por diferenças finitas energéticas. Na seqüência, será aplicado o ptv e, como decorrência, obter-se-ão as equações diferenciais e correspondentes condições de contorno do problema.

4.2.1 Trabalho Virtual das Forças Internas

O trabalho virtual das forças internas pode ser assim expresso:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \quad (14)$$

onde V representa o volume da barra, ou então:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \left(\int_A \sigma_x \delta \varepsilon_x dA \right) dx \quad (15)$$

Com base na expressão (6) de ε_x , obtém-se a primeira variação dessa grandeza na forma:

$$\delta \varepsilon_x = \delta u' + u' \delta u' + w' \delta w' - z \delta \theta' \quad (16)$$

Introduzindo-se então $\delta \varepsilon_x$ ora calculado em (15) e, em seguida, procedendo à integração na área da seção, resulta para δW_{int} :

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l [N(1+u')\delta u' + Nw'\delta w' - M_y\delta\theta'] dx \quad (17)$$

Em razão do tratamento numérico a ser posteriormente implementado, torna-se necessário reescrever essa expressão em termos dos deslocamentos incógnitos do problema u e w . Para tanto, basta, primeiramente, inserir em (17) as expressões dos esforços N e M_y , (11.a) e (11.b), respectivamente, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \left\{ \left[EA \left(u' + \frac{3}{2} u'^2 + \frac{w'^2}{2} + \frac{u'^3}{2} + \frac{u'w'^2}{2} \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + \eta A \left[(1 + 2u' + u'^2) \dot{u}' - (w' + u'w') \dot{w}' \right] \right\} \delta u' + \\
\left. \left\{ EA \left(u'w' + \frac{w'^3}{2} + \frac{u'^2 w'}{2} \right) + \eta A \left[(w' + u'w') \dot{u}' + w'^2 \dot{w}' \right] \right\} \delta w' + \right. \\
\left. + (EI_y \theta' + \eta I_y \dot{\theta}') \delta \theta' \right\} dx
\end{aligned} \tag{18}$$

Em seguida, com o auxílio das relações (2), avaliam-se as grandezas envolvendo θ nessa expressão, isto é,

$$\delta \theta' = \delta \left(\frac{\delta \theta}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta \theta) = w'' \delta u' - u'' \delta w' - w' \delta u'' + (1 + u') \delta w'' \tag{19}$$

$$\theta' = w'' + u' w'' - u'' w' \tag{20}$$

$$\dot{\theta}' = w'' \dot{u}' - u'' \dot{w}' - w' \dot{u}'' + (1 + u') \dot{w}'' \tag{21}$$

as quais, inseridas em (18), conduzem a:

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \left\{ \left[EA \left(u' + \frac{3}{2} u'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{2} u'^3 + \frac{1}{2} u'w'^2 \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + EI_y (w''^2 + u'w''^2 - u''w'w'') + \right. \right. \\
\left. \left. + [\eta A (1 + 2u' + u'^2) + \eta I_y w''^2] \dot{u}' - [\eta A (w' + u'w') + \eta I_y u''w''] \dot{w}' - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\eta I_y w' w'' \dot{u}'' + \eta I_y (w'' + u' w'') \dot{w}'' \left. \vphantom{-\eta I_y w' w'' \dot{u}''}} \right\} \delta u' + \\
& + \left\{ EA \left(u' w' + \frac{1}{2} w'^3 + \frac{1}{2} u'^2 w' \right) - \right. \\
& - EI_y (u'' w'' + u' u'' w'' - u''^2 w') + \\
& + [\eta A (w' + u' w') + \eta I_y u'' w''] \dot{u}' + [\eta A w'^2 - \eta I_y u''^2] \dot{w}' - \\
& - \eta I_y u'' w' \dot{u}'' + \eta I_y (u'' + u' u'') \dot{w}'' \left. \vphantom{-\eta I_y u'' w' \dot{u}''}} \right\} \delta w' - \\
& - \{ EI_y (w' w'' + u' w' w'' - u'' w'^2) + \\
& + \eta I_y [w' w'' \dot{u}' - u'' w' \dot{w}' - w'^2 \dot{u}'' - (w' + u' w') \dot{w}''] \} \delta u'' + \\
& + \{ EI_y (w'' + 2u' w'' - u'' w' + u'^2 w'' - u' u'' w') + \\
& + \eta I_y [(w'' + u' w'') \dot{u}' - (u'' + u' u'') \dot{w}'] - \\
& - \eta I_y [(w' + u' w') \dot{u}'' + (1 + 2u' + u'^2) \dot{w}''] \} \delta w'' \left. \vphantom{-\eta I_y [(w' + u' w') \dot{u}''}} \right\} dx
\end{aligned} \tag{22}$$

que é a expressão do trabalho virtual interno na forma requerida para implementação do tratamento numérico por diferenças finitas energéticas.

4.2.2 Trabalho Virtual das Forças Externas

O trabalho virtual das forças externas será avaliado, em consonância com a hipótese 3, pela seguinte expressão, en-

volvendo a contribuição das cargas de domínio e das possíveis cargas prescritas nas extremidades da barra:

$$\delta W_{ext} = \int_0^L \{ [q_x(x) - f_x] \delta u + [q_z(x) - f_z] \delta w - f_{xz} \delta \theta \} dx + [\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_z \delta w - \bar{M}_y \delta \theta]_0^L \quad (23)$$

sendo as cargas de domínio representadas por:

- $q_x(x)$ - carga axial distribuída segundo o eixo **X**;
- $q_z(x)$ - carga transversal distribuída segundo o eixo **Z**;
- f_x - força de inércia de translação por unidade de comprimento segundo o eixo **X**;
- f_z - força de inércia de translação por unidade de comprimento segundo o eixo **Z**;
- f_{xz} - força generalizada de inércia de rotação por unidade de comprimento;

e as cargas de extremidade por:

- F_x - força axial prescrita nos extremos da barra;
- F_z - força transversal segundo Z, prescrita nos extremos da barra;
- \bar{M}_y - momento em torno de Y, prescrito nas extremidades da barra.

Esse caso geral de carregamento está representado na Figura 4, destacando-se que todas as cargas foram representadas com os sentidos convencionados como positivos.

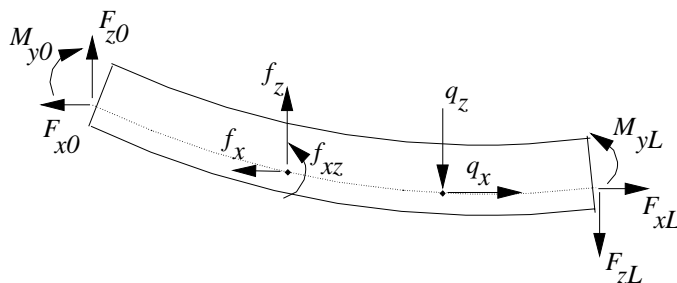


Figura 4 - Carregamento da barra

O cálculo das forças de inércia, a partir das correspondentes definições extraídas de GARCIA (1987), é explicitado a seguir:

$$f_x = \int_A \mu \ddot{u}_1 dA = \int_A \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - z \operatorname{sen} \theta) da = \mu A \ddot{u} \quad (24.a)$$

$$f_z = \int_A \mu \ddot{w}_1 dA = \int_A \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} [w - z(1 - \cos \theta)] da = \mu A \ddot{w} \quad (24.b)$$

$$f_{xz} = - \int_A \mu \ddot{u}_1 z \cos \theta dA - \int_A \mu \ddot{w}_1 z \operatorname{sen} \theta dA = \mu I_y \ddot{\theta} \quad (24.c)$$

Substituindo agora essas expressões em (23), tem-se para δW_{ext} :

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = \int_0^L \{ [q_x(x) - \mu A \ddot{u}] \delta u + [q_z(x) - \mu A \ddot{w}] \delta w - \mu I_y \ddot{\theta} \delta \theta \} dx + \\ + [\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_z \delta w - \bar{M}_y \delta \theta]_0^L \end{aligned} \quad (25)$$

Por outro lado, para expressar δW_{ext} na forma conveniente ao tratamento numérico por diferenças finitas energéticas, impõe-se reescrevê-lo somente em função dos deslocamentos incógnitos do problema, conforme observado no subitem anterior para δW_{int} . Portanto, atentando-se que as grandezas $\ddot{\theta}$ e $\delta \theta$, presentes em (25), podem ser avaliadas com o auxílio das expressões (2), ou seja,

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [(1 + u') \dot{w}' - w' \dot{u}'] = (1 + u') \ddot{w}' - w' \ddot{u}' \quad (26)$$

$$\delta \theta = \delta \theta(u', w') = \frac{\partial \theta}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial \theta}{\partial w'} \delta w' = -w' \delta u' + (1 + u') \delta w' \quad (27)$$

e, em seguida, substituindo essas em (25), resulta finalmente para δW_{ext} :

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = \int_0^L \left\{ [q_x(x) - \mu A \ddot{u}] \delta u + [q_z(x) - \mu A \ddot{w}] \delta w - \right. \\ \left. - \mu I_y [w'^2 \ddot{u}' - (w' + u' w') \ddot{w}'] \delta u' + \right. \\ \left. + \mu I_y [(w' + u' w') \ddot{u}' - (1 + 2u' + u'^2) \ddot{w}'] \delta w' \right\} dx + \\ + \left[\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_z \delta w + \bar{M}_y w' \delta u' - \bar{M}_y (1 + u') \delta w' \right]_0^L \end{aligned} \quad (28)$$

4.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE REGEM O PROBLEMA

As equações diferenciais do problema, bem como as condições de contorno, são obtidas diretamente do ptv, isto é, pela igualdade entre δW_{int} e δW_{ext} .

Com esse objetivo, focaliza-se, primeiramente, a parcela δW_{int} dada em (17), e faz-se uma integração por partes no segundo membro dessa, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = \int_0^L \left\{ [-N(1+u')] \delta u - (Nw')' \delta w + M_y' \delta \theta \right\} dx + \\ + [N(1+u') \delta u + Nw' \delta w - M_y \delta \theta]_0^L \end{aligned} \quad (29)$$

Substituindo $\delta \theta$ avaliado em (27), no integrando de (29), a expressão de δW_{int} assume então a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = \int_0^L \left\{ [-N(1+u')] \delta u - (Nw')' \delta w - M_y' w' \delta u' + M_y' (1+u') \delta w' \right\} dx + \\ + [N(1+u') \delta u + Nw' \delta w - M_y \delta \theta]_0^L \end{aligned} \quad (30)$$

a qual justifica uma nova integração por partes nos dois últimos termos do integrando, do que resulta:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \left\{ [-N(1+u') + M'_y w'] \delta u - [Nw' + M'_y(1+u')] \delta w \right\} dx + \left\{ [N(1+u') - M'_y w'] \delta u + [Nw' + M'_y(1+u')] \delta w - M_y \delta \theta \right\}_0^L \quad (31)$$

Quanto à outra parcela δW_{ext} do pty, dada em (25), faz-se nessa a substituição das grandezas $\ddot{\theta}$ e $\delta \theta$, presentes no integrando, pelas respectivas expressões (26) e (27), donde se obtém:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^L \left\{ [q_x(x) - \mu A \ddot{u}] \delta u + [q_z(x) - \mu A \ddot{w}] \delta w - \mu I_y [w'^2 \ddot{u}' - (w' + u' w') \ddot{w}'] \delta u' + \mu I_y [(w' + u' w') \ddot{u}' - (1 + 2u' + u'^2) \ddot{w}'] \delta w' \right\} dx + [\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_z \delta w - \bar{M}_y \delta \theta]_0^L \quad (32)$$

Finalmente, procedendo-se a uma integração por partes nos termos do integrando contendo $\delta u'$ e $\delta w'$, resulta para o trabalho virtual da forças externas:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^L \left\{ \left\{ q_x(x) - \mu A \ddot{u} + \mu I_y [w'^2 \ddot{u}' - (w' + u' w') \ddot{w}'] \right\} \delta u + \left\{ q_z(x) - \mu A \ddot{w} - \mu I_y [(w' + u' w') \ddot{u}' - (1 + 2u' + u'^2) \ddot{w}'] \right\} \delta w \right\} dx + [\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_z \delta w - \bar{M}_y \delta \theta]_0^L \quad (33)$$

Aplicando-se o ptv, ou seja, igualando-se as expressões (31) e (33), obtém-se, para o domínio, as seguintes equações diferenciais para o problema, escritas em termos dos esforços N e M_y :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ N(1+u') - M'_y w' + \mu I_y [w'^2 \ddot{u}' - (w' + u'w') \ddot{w}'] \right\} - \mu A \ddot{u} = -q_x(x) \quad (34.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ Nw' + M'_y(1+u') - \mu I_y [(w' + u'w') \ddot{u}' - (1+2u' + u'^2) \ddot{w}'] \right\} - \mu A \ddot{w} = -q_z(x) \quad (34.b)$$

Alternativamente, com o auxílio das expressões (11.a), (11.b), (20) e (21), obtém-se as equações diferenciais escritas totalmente em termos dos deslocamentos u e w no instante t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EA \left(u' + \frac{3}{2} u'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{2} u'^3 + \frac{1}{2} u'w'^2 \right) + \right. \\ + EI_y (w'w''' + u'w'w''' - u'''w'^2) + \\ + [\eta A(1+2u' + u'^2) + \eta I_y w'w'''] \dot{u}' + [\eta A(w' + u'w') - \eta I_y w'u'''] \dot{w}' - \\ - \eta I_y w'^2 \dot{u}''' + \eta I_y (w' + u'w') \dot{w}''' + \\ \left. + \mu I_y w'^2 \ddot{u}' - \mu I_y (w' + u'w') \ddot{w}' \right\} - \mu A \ddot{u} = -q_x(x) \end{aligned} \quad (35.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EA \left(u'w' + \frac{1}{2} u'^2 w' + \frac{1}{2} w'^3 \right) - \right. \\ - EI_y (w''' + 2u'w''' - u'''w' - u'u'''w' + u'^2 w''') + \\ + [\eta A(w' + u'w') - \eta I_y (w''' + u'w''')] \dot{u}' + [\eta A w'^2 + \eta I_y (u''' + u'u''')] \dot{w}' + \\ + \eta I_y (w' + u'w') \dot{u}''' - \eta I_y (1+2u' + u'^2) \dot{w}''' - \\ \left. - \mu I_y (w' + u'w') \ddot{u}' + \mu I_y (1+2u' + u'^2) \ddot{w}' \right\} - \mu A \ddot{w} = -q_z(x) \end{aligned} \quad (35.b)$$

4.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA

Da igualdade entre as expressões (31) e (33), deduzem-se, também, as seguintes condições estáticas e cinemáticas nas extremidade da barra (com barra superior indicando valores prescritos das grandezas):

$$N(1+u') - M'_y w' = \bar{F}_x \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (36.a)$$

$$Nw' + M'_y(1+u') = \bar{F}_z \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (36.b)$$

$$M_y = \bar{M}_y \quad \text{ou} \quad \theta = \bar{\theta} \quad (36.c)$$

ou ainda, recorrendo-se às expressões (20) e (21) de N e M_y :

$$\begin{aligned} & EA \left(u' + \frac{3}{2} u'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{2} u'^3 + \frac{1}{2} u' w'^2 \right) + \\ & + EI_y (w' w''' + u' w' w''' - u''' w'^2) + \\ & + [\eta A (1 + 2u' + u'^2) + \eta I_y w' w'''] \dot{u}' + [\eta A (w' + u' w') - \eta I_y w' u'''] \dot{w}' - \\ & - \eta I_y w'^2 \dot{u}''' + \eta I_y (w' + u' w') \dot{w}''' = \bar{F}_x \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \quad (37.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & EA \left(u' w' + \frac{1}{2} u'^2 w' + \frac{1}{2} w'^3 \right) - \\ & - EI_y (w''' + 2u' w''' - u''' w' - u' u''' w' + u'^2 w''') + \\ & + [\eta A (w' + u' w') - \eta I_y (w''' + u' w''')] \dot{u}' + [\eta A w'^2 + \eta I_y (u''' + u' u''')] \dot{w}' + \\ & + \eta I_y (w' + u' w') \dot{u}''' - \eta I_y (1 + 2u' + u'^2) \dot{w}''' = \bar{F}_z \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (37.b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - EI_y (w'' + u' w'' - u'' w') - \eta I_y [w'' \dot{u}' - u'' \dot{w}' - w' \dot{u}'' + (1 + u') \dot{w}'] = \bar{M}_y \quad \text{ou} \\ & \theta = \bar{\theta} \quad (37.c) \end{aligned}$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, de cunho eminentemente analítico, pode-se considerar cumprida a primeira parte dos objetivos globais da pesquisa, qual seja:

a) Instituição das expressões dos trabalhos virtuais interno e externo para o problema em estudo, equações (22) e (28), respectivamente, escritas, exclusivamente, em termos dos deslocamentos u e w , forma essa apropriada à implementação posterior do tratamento numérico por diferenças finitas energéticas;

b) Dedução, a partir do ptv, das equações diferenciais que regem o problema e correspondentes condições de contorno estáticas e cinemáticas, equações (35) e (37), tendo-se, assim, a formulação analítica completa do problema. A esse respeito, cabe destacar que a dedução de GARCIA (1987) baseou-se no princípio de Hamilton, o que é equivalente à utilização do ptv.

Resta, por fim, enfatizar que, dada a complexibilidade das equações geradas, justifica-se, plenamente, a implementação de abordagens numéricas visando gerar ferramentas computacionais para explorar o potencial da teoria. Portanto, à luz desse entendimento, será apresentada, numa próxima publicação, a formulação numérica por diferenças finitas energéticas para o problema, combinada com o método da aceleração constante como procedimento de marcha no tempo.

REFERÊNCIAS

CLOGH, R. W. ; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**, 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1993.

GARCIA, L. F. T. **Uma contribuição ao estudo da flexão de barras com forte não linearidade geométrica**. 1987. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

LIMA, J. M. F. **Análise dinâmica da flexão de barras com não linearidade geométrica utilizando diferenças finitas energéticas**. 1995. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

PAZ, M. **Structural Dynamics**, 2.ed. New York: Van Nostrand, 1985.

Sitentibus, Feira de Santana, n.26, p.131-149, jan./jun. 2002